Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial_\mu \partial^\mu \underline{+} \lambda_c^{-2})\psi = 0$$

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \nabla^2$$

$\nabla \cdot \vec{j} + \dot{\rho} = 0 \implies$ evtl. $\rho < 0 \implies$ Wahrscheinlichkeitsinterpretation schlecht

<u>Idee:</u> Ladungsdichteinterpretation

## <u>II. 1.3 Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung</u>

als Wellengleichung kann die vollständige Lösung nach Elementarwellen entwickelt werden:

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_{\vec{p}} A(\vec{p}) \underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - Et)}}_{\substack{\text{ebene Wellen} \\ \text{mit } \hbar k = p \\ \hbar\omega = E}}$$

Dispersionsrelation $E = E(p)$

Einsetzen:
$$-\frac{p^2}{\hbar^2} + \frac{1}{c^2}\frac{E^2}{\hbar^2} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} = 0$$

$$E = \pm c\,(m^2c^2 + p^2)^{1/2} \equiv \pm E(p)$$

$\rightarrow$ 2 Lösungen: $\psi_\pm^{(p)} \sim e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\cdot\vec{r} - E_\pm \cdot t)}$, $E_\pm = \pm E(p)$

a.) Sind das positive und negative Teilchen? $\rightarrow$ ja!

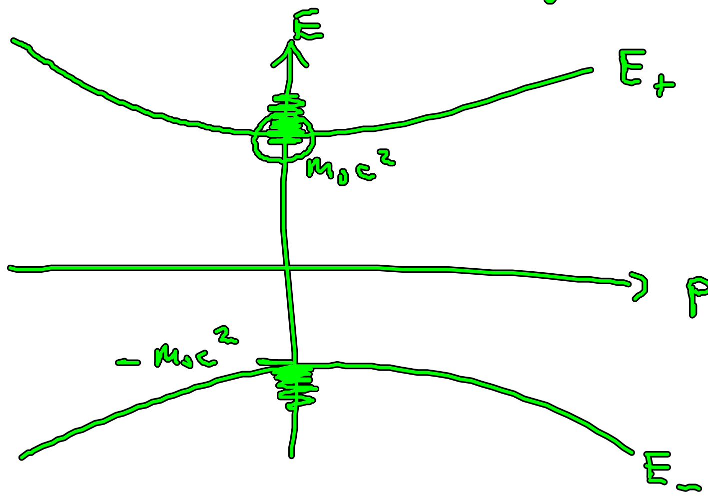
b.) in Schrödingertheorie war E die Energie.
gibt es negative Energien bei freien Teilchen?

$\longrightarrow$ <u>hier</u> nicht!

## I.1.4. Ladung von Teilchen | Antiteilchen-Paar, neutrale Teilchen

E-Spektrum der Klein-Gordon-Gleichung:

nicht unbedingt Energie




○ Schrödinger-Welt
Rest ist neu

Idee: Ladungsdichteinterpretation

$$\rho \to e\rho = \frac{i\hbar e}{2m_0c^2}\left(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*\right) \qquad (e>0)$$

Dimension: Ladungsdichte

Ladung des Teilchens

$$q = \int d^3r\, e\rho$$

nehmen $\psi_+, \psi_-$

$$e^{-\frac{i}{\hbar}E(p)t} \qquad e^{+\frac{i}{\hbar}E(p)t}$$

$$\longrightarrow \quad q_\pm = \pm\frac{e}{m_0c^2}\,|\tilde{A}_\pm(p)|^2\, c\,(m_0^2c^2+p^2)^{1/2}\,\underbrace{L^3}_{\int d^3r}$$

Offensichtlich beschreibt $\psi_+$ $(E>0)$ ein Teilchen der Ruhemasse $m_0$ und Ladung $q_+>0$ und $\psi_-$ $(E<0)$ ein Teilchen " " " und Ladung $q_-<0$ $\longrightarrow$ Teilchen | Antiteilchen-Paar

Indiz: jede relativistische Theorie ist eine Vielteilchentheorie die Einteilchenbeschreibung ist nicht zu retten

Normierung über Ladung festgelegt

$$|\tilde{A}_\pm(p)| = \Bigg( \underbrace{\frac{|Z_\pm|}{e}}_{\text{Anzahl der Ladungen}} \frac{m_0 c^2}{E(p) L^3} \Bigg)^{1/2}$$

Das neutrale Teilchen lässt sich durch Überlagerung konstruieren:

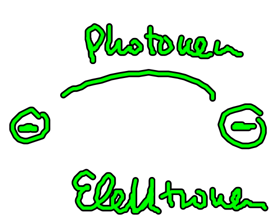
$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \Psi_+(p) + \Psi_-(-p) \right)$$
$$= \left( \frac{m_0 c^2}{2E(p)L^3} \right)^{1/2} 2 \cos\left( (\vec{p}\cdot\vec{r} - E(p)t)/\hbar \right)$$

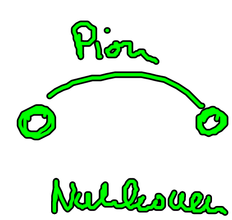
Es gibt keine weiteren Freiheitsgrade außer Ladung, daher beschreibt die Klein-Gordon-Gleichung Spin 0-Teilchen.

## I.1.5. Pionen – Beispiel für massereiche Spin 0-Teilchen

Triplett von Pionen $(\pi^+, \pi^-, \pi^0)$

Yukawa (1935) versuchte WW zwischen Nukleonen zu erklären (Kernkraft)
(effektive Theorie)




elektromagnetische Kraft

Kernkraft

stationär $\rightarrow \partial_t = 0 \Longrightarrow (\Delta - \lambda_c^{-2})\psi = 0$

$\lambda_c^{-2} \neq 0 \xrightarrow{\text{Masse} \neq 0} \frac{1}{r} e^{-\frac{r}{\lambda_c}}$ (abgeschirmtes Coulomb-Potential)

„kurzreichweitig"

$\lambda_c^{-2} = 0 \xrightarrow{\text{Masse} = 0} \frac{1}{r}$ (Coulomb)

„langreichweitig"

## II.1.6 Energie von Teilchen | Antiteilchen

Schrödingertheorie: $\underline{H}\varphi_n = E_n \varphi_n$, $E_n$ Energien der Teilchen

Suche: Hamiltonfunktion der KG-Gleichung

Idee: bezogen aus Lagrangedichte $\rightarrow$ Hamiltondichte $\rightarrow$ Energie
(Lagrangeformalismus)

a) Raten einer Lagrangedichte

2 Felder: $\psi, \psi^*$ $\leftarrow$ $\psi$ komplex

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \psi^*, \partial_\mu \psi, \partial_\mu \psi^*)$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{m_0}\left(\eta_{\mu\nu}(\partial^\mu \psi)(\partial^\nu \psi^*) - \lambda_c^{-2}\psi^*\psi\right)$$

b.) Bestätigung der Lagrangedichte durch Herleitung der KG-Gleichung

$$\partial^\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi^*)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^*} = 0 \qquad \text{Euler-Lagrange-Gleichungen}$$

$$\rightsquigarrow \partial^\mu(\eta_{\mu\nu}\partial^\nu \psi) + \lambda_c^{-2}\psi = 0$$

$$(\partial^\mu \partial_\mu + \lambda_c^{-2})\psi = 0 \quad ✓$$

c.) Hamiltondichte bestimmen, als Energiedichte identifizieren

$$\mathcal{H} = \pi_\psi \cdot \partial_0 \psi + \pi_{\psi^*} \cdot \partial_0 \psi^* - \mathcal{L}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = \frac{\hbar^2}{2m_0}\partial^0\psi^* \qquad = \frac{\hbar^2}{2m_0}\partial^0\psi \qquad (\partial^0 = \partial_0)$$

$$\longrightarrow \mathcal{H} = \frac{\hbar^2}{2m_0}\left(\partial_0\psi\cdot\partial_0\psi^* + \partial_i\psi\cdot\partial_i\psi^* + \lambda_c^{-2}\psi^*\psi\right)$$

daraus ergibt sich Energie $H_\pm(t) = \int d^3r\, \mathcal{H}(\vec{r},t)$ des Teilchens:

$$H_\pm = \frac{|q_\pm|}{e}E(p) \geq 0$$

Teilchen und Antiteilchen der KG-Gleichung haben eine Energie $> 0$,
$E_\pm$ sind nur Parameter die $\psi_\pm$ kennzeichnen.

## I.1.7. Teilchen / Antiteilchen-Wellen

relativistische Theorie ist immer eine Vielteilchentheorie:

Beispiel: negatives Pion gebunden an einen positiven Kern (Pionatom)
(stationäres Potential $\phi$)

⊖ Pion $(q<0)$

⊕ Kern

allgemein:

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\partial_t &\longrightarrow i\hbar\partial_t - q\phi \\ \vec{p} &\longrightarrow \vec{p} - q\vec{A} \end{aligned}\right\} \text{Teilchen im em. Feld } (\phi, \vec{A})$$

hier: statisches $\phi$, $\vec{A} = 0$

$$(i\hbar\partial_t - q\phi)^2\psi = -c^2\hbar^2\psi + m_0^2c^4\psi$$

KG-Gl. für Teilchen im Potential $\phi$

Ableitung der Kontinuitätsgleichung im Potential $\phi$:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2m_0c^2}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi\, \partial_t \psi^*\right) - \frac{q}{m_0 c^2}\,\phi\, \psi^* \psi$$

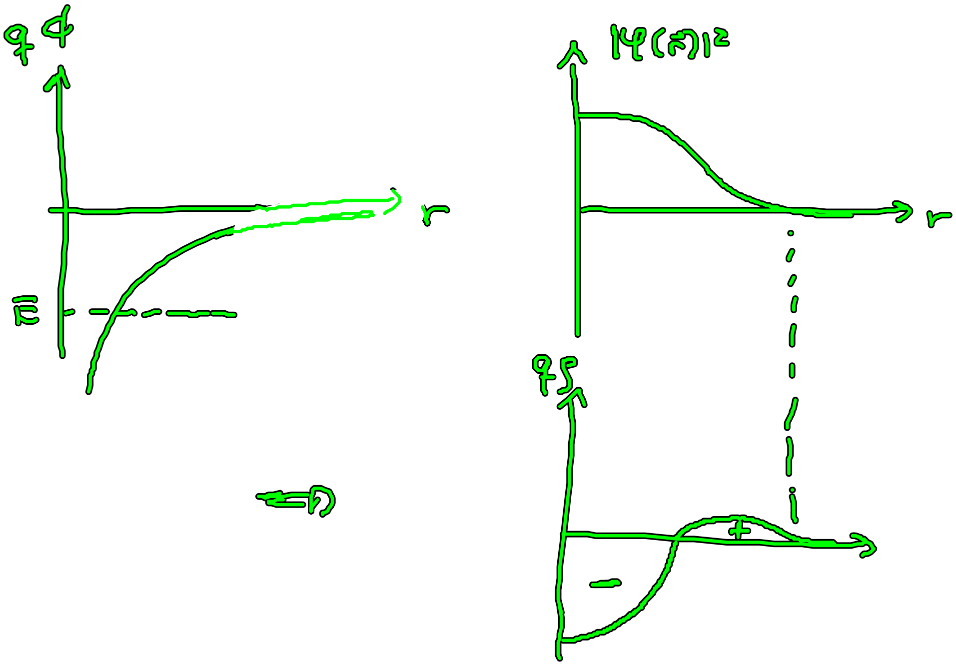
stationäres Problem: $\psi = e^{-\frac{iEt}{\hbar}}\, \varphi(\vec r)$, $\varphi(\vec r)$ wird aus stat. KG-Gl. bestimmt

$$\left[(E-q\phi)^2 - m_0^2 c^4 + c^2\hbar^2\nabla^2\right]\varphi(\vec r) = 0$$

Ladungsdichte $\quad q\rho = \frac{\hbar q}{m_0 c^2}\,(E-q\phi)\,\varphi^*(\vec r)\,\varphi(\vec r)$

Annahme: gebundener Zustand $E<0$

lokalisierter Zustand




Ein Teilchen ist beim Vorliegen eines Potentials $\phi$ immer auch von Antiteilchen umgeben.

## II. 1. 8. „Langsame" Klein-Gordon-Gleichung ist Schrödinger-Gleichung

Ansatz: $\psi(\vec r, t) = \tilde\psi(\vec r, t)\, e^{-i/\hbar\, m_0 c^2 \cdot t}$

$\uparrow$ langsame zeitliche Variation

$$\longrightarrow \quad \partial_t^2 \Psi = \partial_t \left( \left(\partial_t \tilde{\Psi} - \frac{i}{\hbar} m_0 c^2 \tilde{\Psi}\right) e^{-i/\hbar \, m_0 c^2 t} \right)$$

$$= \left( \underbrace{\partial_t^2 \tilde{\Psi}}_{=0} - \frac{2i}{\hbar} m_0 c^2 \partial_t \tilde{\Psi} - \underline{\underline{\frac{m_0^2 c^4}{\hbar^2}}} \tilde{\Psi} \right) e^{-i/\hbar \, m_0 c^2 t}$$

$$\longrightarrow \quad i\hbar \partial_t \tilde{\Psi} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \tilde{\Psi}$$

<u>Schrödingergleichung</u>.