Die Lösung der Differentialgleichung

$$\partial_t p(t) = i\,\phi(t)\,p(t)$$

ergibt sich, wenn $[\phi(t_1), \phi(t_2)] = 0$ ist

termweise zu der Summe:

$$p(t) = p(t_0) \sum_n \frac{(i)^n}{n!} \left(\int^t dt'\, \phi(t') \right)^n = p(t_0)\, e^{i \int^t dt' \phi(t')}$$

dies ist nicht der Fall, wenn $\phi(t)$ ein Operator ist, dann ist der Kommutator i.a. $\neq 0$.

3.3.5. Der Zeitordnungsoperator

braucht man, wenn ϕ ein Operator ist

n-ter Term der von Neumannreihe:

$$\int^t dt_1 \int^{t_1} dt_2 \,..\, \int^{t_{i-1}} dt_i \cdots \int^{t_{n-1}} dt_n \; \phi(t_1)\, \phi(t_2) \cdots \phi(t_n)$$

$\curvearrowright \phi_1 \quad \curvearrowright \phi_2 \quad \curvearrowright \phi_n$

t_{e-1} $\quad$ t $\quad$ i.a. nicht vertauschbar

soll versucht werden alle $\int dt_e$ als $\int^t dt_e$ zu schreiben → Vereinfachg.

↙ man will von Integral verschachtelung weg

$$= \int^t dt_1 \int^t dt_2 \underbrace{\theta(t_1 - t_2)}_{\substack{\text{wenn grenze } t_1 \\ \text{stellt die } \theta \text{ Fkt} \\ \text{sicher, daß} \\ t_2 < t_1}} \cdots \int^t dt_i \, \theta(t_{i-1} - t_i) \cdots \int^t dt_n \, \theta(t_{n-1} - t_n) \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n$$

alle Permutation

$$= \int^t dt_1 \int^t dt_2 \cdots \int^t dt_i \cdots \overbrace{\theta(t_1 - t_2) \cdots \theta(t_{i-1} - t_i) \cdots \theta(t_{n-1} - t_n)}^{} \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n$$

wie kriegt man $\frac{1}{n!}$ um formel in exponentialreihe aufschreiben zu können

→ durch verändern der Integrationvariablen kann man $n!$ Permutationen erzeugen: die sind alle identisch

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\text{alle} \\ \text{Permutationen}}} \int^t dt_1 \cdots \int^t dt_n \; \underline{\underline{\theta(t_1 - t_2) \cdots \theta(t_{n-1} - t_n)}} \; \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n$$

↑

Korrekturfaktor für

setzen „ $=$ " $= T$ als Zeitordnungsoperator

Übersetzungs-
vorschrift

t $\quad$ t $\quad$ t

$$= \frac{1}{n!} T \int dt_1 \int dt_2 \cdots \int dt_n \; \phi_1 \phi_2 \cdots \phi_n$$

$\boxed{\text{Bsp}}$ für 2. Term :

1. Permutation

$$T \phi_1 \phi_2 = \theta(t_1 - t_2)\, \phi(t_1)\, \phi(t_2) \qquad t_2 < t_1$$

$$+ \theta(t_2 - t_1)\, \phi(t_2)\, \phi(t_1) \qquad t_1 < t_2$$

2. Permutation

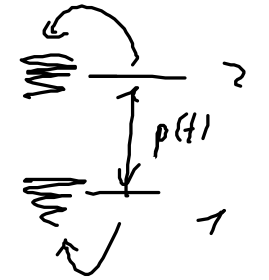
man sagt, T ordnet die Zeitfolge von $\phi(t)$ von rechts nach links mit aufsteigenden Zeiten

$$\rho(t) = \rho(t_0)\, T \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left(\int^t dt'\, \phi(t') \right)^n$$

$$= \rho(t_0)\, \underbrace{T\, e^{i \int^t dt'\, \phi(t')}}_{\text{Zeitgeordnete Exponentialfunktion}}$$

Feynman hat Regeln für Rechnen mit zeitgeordneten Größen angegeben (analog Zahlen rechnen)

Ziel: echte Lösung des Modells:



Energie transfer

$$\langle p(t)\rangle = Sp\left(p(t_0)\, T e^{i\int_{t_0}^{t} dt'\, \phi(t')} \rho(t_0)\right)$$

Erwartungswert der Dipolschwingung

statistischer Operator am Beginn zur Zeit t_0

$$= Sp_{el}\Big(\underbrace{p(t_0)\, \rho_{el}(t_0)}_{p_0 \text{ - Anfangswert}}\Big)\; Sp\left(T e^{i\int_{t_0}^{t} dt'\, \phi(t')} \rho_{ph}(t_0)\right)$$

Annahme: vor t_0 gilt Born Oppenheimer

Näherung: $\rho(t_0) = \rho_{el}(t_0)\, \rho_{ph}(t_0)$

im Gleichgewicht vor der Dipolschwingung. $\frac{1}{Z} e^{-\frac{H_{ph}}{kT}}$

$$= \rho_0 \; sp_{ph} \left(\sum_n \frac{i^n}{n!} \int^t dt_1 \cdots \int^t dt_n \; T \phi(t_1) \cdots \phi(t_n) \rho_{ph} \right)$$

gesucht $\; sp_{ph} \left(T \phi(t_1) \cdots \phi(t_n) \right) = ?$

die Berechng. dieser Größe ist das Problem:

löst das Wicktheorem.

3.3.6. Das Wicktheorem

Ziel: Zerlegg. von n-Punktfunktion $\langle T\phi_1 \cdots \phi_n \rangle$

in kleine beherrschbare Bausteine: $\langle T \phi_1 \phi_2 \rangle$

allerdings: geht nur im WW Bild, hier

$$b_\alpha^{(+)}(t) = \underbrace{b_\alpha^{(+)}(t_0)}_{\text{Anfangswert}} \; \underbrace{e^{\overset{(+)}{-} i \omega_\alpha t}}_{\substack{\text{freie Zeitabhängigkeit} \\ \text{v. WW Bild}}} \qquad \text{(Badannahme)}$$

∃ Wicktheorem f. Bosonen, Fermionen + Mischg. von beiden

a) betrachten den zukünftigen Grundbaustein f. die n-Punktfunktionen:

$$D(t_1,t_2) \equiv \langle T\,\phi(t_1)\,\phi(t_2)\rangle$$

"Phonon-propagator, Greens funktion"

$$= \Theta(t_1-t_2)\langle\phi(t_1)\phi(t_2)\rangle + \Theta(t_2-t_1)\langle\phi(t_2)\phi(t_1)\rangle$$

$$= \Theta(t_1-t_2)\,sp_{ph}\Big(\rho_{ph}\underline{\sum_{\alpha_1\alpha_2}}\,\underline{g_{\alpha_1}}\,g_{\alpha_2}\underbrace{\big(b_{\alpha_1}(t_1)+b^+_{\alpha_1}(t_1)\big)}_{\hat{=}\,\phi_1}\big(b_{\alpha_2}(t_2)+b^+_{\alpha_2}(t_2)\big)\Big)$$

$$+\ (t_1 \leftrightarrow t_2)$$

$$sp_{ph}(\cdot) \equiv \sum_n \langle n|\ \cdot\ |n\rangle$$

anwende: Zustände am Ende müssen gleich sein, sonst $=0$, weil $\langle n|n'\rangle = 0$ f. $n\neq n'$.

vollständiges System von Phonon besetzungs-zahl zuständen

$$= \Theta(t_1-t_2)\sum_{\alpha_1\alpha_2} g_{\alpha_1}g_{\alpha_2}\,sp\Big(\big(b_{\alpha_1}(t_1)b^+_{\alpha_2}(t_2)+b^+_{\alpha_1}(t_1)b_{\alpha_2}(t_2)\big)\frac{e^{-\beta H_{ph}}}{Z}\Big)$$

$$+(t_1\leftrightarrow t_2)$$

: $\delta_{\alpha_1\alpha_2}$ stellt $\langle n|n\rangle$ sicher!

$$= \theta(t_1 - t_2) \sum_\alpha g_\alpha^2 \left\{ (1+n_\alpha)\, e^{-i\omega_\alpha (t_1 - t_2)} + n_\alpha\, e^{i\omega_\alpha (t_1-t_2)} \right\}$$
$$+ (t_1 \leftrightarrow t_2)$$

n_α : Phononzahl (Boseverteilung)
enthält $\beta = \frac{1}{kT}$ als Parameter der Umgebg.

$$D(t_1, t_2) = \sum_\alpha g_\alpha^2 \left\{ (1+n_\alpha) e^{-i\omega_\alpha |t_1 - t_2|} + n_\alpha\, e^{+i\omega_\alpha |t_1 - t_2|} \right\}$$

Phononpropagator $t_2 \to t_1$
man erkennt Phononabsorption / emission
(spontane Emission: 1 mit $n_\alpha = 0$)

b) Wie kann man $\langle T \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle$ in $D(t_1 t_2)\, D(t_3 t_4)$ etc zerlegen?

1. Wicktheorem: Zeitgeordnete Produkte von Operatoren im
(Boson) WW-Bild werden in alle Permutationen
von je 2 Operatoren in $D(t_1, t_2)$ zerlegt:

$$\underbrace{\quad}_{D(t_1 t_2)}$$

$$\langle T\, \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \cdots \rangle = \langle T\, \phi_1 \phi_2 \rangle \langle T\, \phi_3 \phi_4 \rangle \cdots$$

gerade Anzahl
(∀ alle ungeraden = 0)

alle mögl. Kontraktionen als Paare

$$= \sum_{\text{alle mögl. Kontraktionen}} \prod_{a,b} \langle T\, \phi_a \phi_b \rangle$$

<u>Klarmachen d. Wicktheorems f. Bsp. $n=4$:</u>

$$\langle T\, \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle = ?$$

Starten mit $\langle T\, b^{(+)}_{\alpha_1} \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle =$

später dann ϕ_1 wieder zusammenbauen

$$= \langle T\, b^{(+)}_{\alpha_1} \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle - \langle T\, \phi_2 b^{(+)}_{\alpha_1} \phi_3 \phi_4 \rangle$$

$= 0$

$$+ \langle T\, \phi_2 b^{(+)}_{\alpha_1} \phi_3 \phi_4 \rangle - \langle T\, \phi_2 \phi_3 b^{(+)}_{\alpha_1} \phi_4 \rangle$$

$= 0$

$$+ \langle T\, \phi_2 \phi_3 b^{+}_{\alpha_1} \phi_4 \rangle - \langle T\, \phi_2 \phi_3 \phi_4 b^{(+)}_{\alpha} \rangle$$

$= 0$

$$+ \langle T \phi_2 \phi_3 \phi_4 b_\alpha^{(+)} \rangle$$

Zahl, daher aus dem $\langle\,\rangle$ rausnehmen

$$= \Big\{ \langle T \phi_3 \phi_4 \rangle [b_{\alpha_1}^{(+)}, \phi_2] \quad \text{(1. Zeile)}$$

$$+ \langle T \phi_2 \phi_4 \rangle [b_{\alpha_1}^{(+)}, \phi_3] \quad \text{(2. Zeile)}$$

$$+ \langle T \phi_2 \phi_3 \rangle [b_{\alpha_1}^{+} \phi_4] \quad \text{(3. Zeile)}$$

$$+ \, Sp_{ph} \left(T \phi_2 \phi_3 \phi_4 b_\alpha^{(+)} \rho_{ph} \right) \Big\}$$

„wäre schön", denn da ist die rechte Seite!

Phononenergie

Formel: $$b_\alpha^{(+)} \rho_{ph} = \rho_{ph} b_\alpha^{(+)} e^{\pm \varepsilon_\alpha \beta}$$

vertauschen, denn zyklische Invarianz der Spur nutzen

letzter Term: $$sp\left(T b_{\alpha_1}^{(+)} \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rho_{ph}\right) e^{(\pm) \varepsilon_\alpha \beta}$$

$\Longrightarrow$

$$\langle T\, b^{+}_{\alpha_1}\, \phi_2\, \phi_3\, \phi_4 \rangle =$$

$$\frac{-1}{e^{+\beta\varepsilon_\alpha}-1}\left(D(t_3,t_4)\, T\left[b^{+}_{\alpha_1}, \phi_2\right] + \ldots \right.$$

2 weitere Zeile)

$$\left[b^{(+)}_{\alpha_1}, \phi_2\right] = \Big(\underset{t_1}{b^{(+)}_{\alpha_1}} \sum_{\alpha_2} g_\alpha \underset{t_2}{\left(b^{+}_{\alpha_2} + b_{\alpha_2}\right)} - \text{vertauscht} \Big)$$

$$= \mp\, g_{\alpha_1}\, e^{\pm i\omega_{\alpha_1}(t_1 - t_2)}$$

aufsummiert f. ϕ_1:

$$+ D(t_1,t_4)\, D(t_2,t_3)$$
$$+ D(t_1,t_3)\, D(t_2,t_4)$$

$$\langle T\, \phi_1\, \phi_2\, \phi_3\, \phi_4 \rangle = \Big(D(t_1,t_2)\cdot D(t_3,t_4) + \ldots \Big)$$

am Bsp. das Wickthorem klargemacht.