4. Wechselwirkende Quantenfelder: Elektron-Photon-Kopplung

4.1. Quantisierung des elektromagnetischen Felds

Formalismus anwenden an Kapitel 1

a) Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2(\vec{r},t) - \frac{1}{\mu_0} B^2(\vec{r},t)\right)$$

$$\vec{E} = \cancel{-\nabla\phi} - \partial_t A \,, \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

im Vakuum quantisieren $\phi = 0$

Strahlungseichung im Vakuum

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sum_{e=1}^{3}\left(\varepsilon_0 \left(\partial_t A_e\right)^2 - \frac{1}{\mu_0}\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)_e^2\right)$$

in Koordinatenschreibweise

b) Impulsvariable

$$\Pi_{\vec{A}} \rightarrow \Pi_{A_x} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_t A_x)} = \varepsilon_0\,\partial_t A_x = -\varepsilon_0 E_x$$

auch y, z Komponente

→ Vektorpotential und elektrisches Feld sind zueinander konjugierte Variable

c) Vertauschungsregeln

transversale Deltafunktion, sonst ist $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} \neq 0$ im Volumen

$$\left[A_e(\vec{r},t),\ E_m(\vec{r}\,',t) \right] = \frac{i\hbar}{\varepsilon_0}\, \delta_{em}\, \delta^T(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$$\underbrace{\delta_{em}\,\delta^T(\vec{r}-\vec{r}\,')}_{\text{Tensor }(e,m)} = \delta_{em}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,') - \frac{1}{4\pi}\,\partial_e\partial_m \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

$$\vec{r} = \sum_n \vec{e}_n x_n$$

$$\partial_e \vec{r} = \sum_n \vec{e}_n \frac{\partial}{\partial x_e} x_n$$

d) Feldoperatoren einführen

$$\underline{\vec{A}},\ \underline{\vec{E}}$$

e) Hamiltonoperator f. Bewegungsgl.

$$\mathcal{H} = (-\partial_t \underline{\vec{A}})\cdot \underline{\vec{E}}\,\varepsilon_0 - \mathcal{L}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec{B}^2$$

f) aus Lagrangegl. → Feldgleichungen

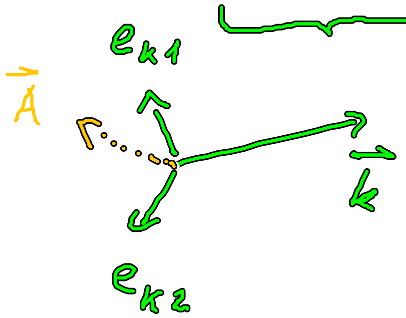
$\Box \vec{A} = 0$ Wellengleichg. im Vakuum

g) Modenentwicklg. nach vollständigem System von $\Box \vec{A} = 0$

ebene Wellen:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_n \underbrace{u_n(\vec{r})}_{\text{ebene Welle}} \, c_n(t)$$

Photonoperator



$\lambda = 1,2$, $n : (\vec{k}, \lambda)$

$\vec{e}_{k\lambda}$, λ: 1,2

Operator im Heisenberg.

$$\vec{A} = \sum_k \sum_{\lambda=1}^{2} f_k \, \vec{e}_{k\lambda} \, e^{i\vec{k}\vec{r}} \, c_{\lambda k}(t) + h.a.$$

Einheit

Amplituden (dimensionslos)

$$f_k = \left(\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 c|\vec{k}| L^3}\right)^{1/2}$$

diese Wahl stellt sicher daß $[c_{\lambda k}, c^{+}_{\lambda' k'}] = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{kk'}$ und

$$H = \sum_{\lambda k} \hbar\omega_{\lambda k} c^{+}_{\lambda k} c_{\lambda k}$$

$$\underline{E} = \partial_t \underline{A} = \sum_{k\lambda} i g_k \vec{e}_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} c_{\lambda k}(t) + \text{h.a.}$$

$$\underline{B} = \vec{\nabla}\times\vec{\underline{A}} = \sum_{k\lambda} f_k i\vec{k}\times\vec{e}_{k\lambda} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} c_{\lambda k}(t) + \text{h.a.}$$

$$g_k = \left(\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 L^3}\right)^{1/2}, \quad \omega_k = c|k|$$

(aus $\dot{c}_{\lambda k}(t) = -i\omega c_{\lambda k}$)

h) Darstellung von H in Moden:

$$H = \frac{1}{2}\int d^3r \left(\varepsilon_0 (\partial_t \vec{A})^2 + \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{A})^2\right) = H(c^{+}, c)$$

durch Einsetzen von $\vec{E}, \vec{B}$ folgt:

$$H = \sum_{\lambda k} \hbar \omega_k \left(c^{+}_{\lambda k} c_{\lambda k} + \frac{1}{2} \right)$$

$c|k|$

Bemerkungen

a) Strahlungsfeld kann wieder durch ein Satz von harmonischen Oszillatoren dargestellt werden

Die Oszillatoren beschreiben die Anregungen der einzelnen Moden und Photonen

b) Photonen sind Bosonen

$$\rightarrow \left[c_{\lambda k}, c^{+}_{\lambda' k'} \right]_- = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{kk'}$$

$$\left[c^{(+)}_{\lambda k}, c^{(+)}_{\lambda' k'} \right]_- = 0$$

c) wichtige Effekte: aus Quantentheorie des Strahlungsfelds

- Dirac H-Atom $2S_{1/2}$, $2P_{1/2}$ hat Entartung diese wurden durch Quantisierg. des Strahlungsfelds aufgehoben (Lamb-shift)

- Spontane Emission (Lampenlicht!)

- Übergang von spontaner Emission → Laserlicht

- nichtklassische Zustände (Fockzustände)

  z.B. Zustand mit 1 Photon

Nachtrag zu Ableitg. des $\underline{H}$:

$$H_{E^2} = \int d^3r \, \frac{\varepsilon_0}{2} \overbrace{\sum_{\lambda k} \left(i g_k \vec{e}_{k\lambda} \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, c_{\lambda k}(t) - i g_k \vec{e}_{k\lambda} \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \, c^+_{\lambda k}(t) \right)}^{E}$$

$(\partial_t A)^2$

$$\underbrace{\sum_{\lambda' k'} \left(i g_{k'} \vec{e}_{k'\lambda'} \, e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \, c_{\lambda' k'}(t) - i g_{k'} \vec{e}_{k'\lambda'} \, e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \, c^+_{\lambda' k'}(t) \right)}_{E}$$

beim Ausmultiplizieren:

4 Terme, in jedem $\underbrace{\int d^3r \, e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}}_{(2\pi)^3 \, \delta(\vec{k}-\vec{k}')} \longrightarrow \delta_{kk'} L^3$

siehe Statistik

d.h. 1 Summe verschwindet.

kürzt sich in g_k^2 raus.

$$\vec{e}_{k\lambda'} \cdot \vec{e}_{k\lambda} \to \delta_{\lambda\lambda'}$$

d.h. nur 1 λ Summe entsteht

4 Terme:

$c_{\lambda k} c_{\lambda k} \to$ fällt raus mit H_{B^2}

$c^+_{\lambda k} c_{\lambda k} \to$ wollen wir

$c_{\lambda k} c^+_{\lambda k} \to c^+_{\lambda k} c_{\lambda k} + 1$

$c^+_{\lambda k} c^+_{\lambda k} \to$ fällt raus mit H_{B^2}

$$2\left(c^+_{\lambda k} c_{\lambda k} + \frac{1}{2}\right) \checkmark$$

übrige Vorfaktoren ergeben $\frac{\hbar \omega_k}{2}$

$$\Rightarrow H = \sum_{\lambda k} \hbar \omega_k \left(c^+_{\lambda k} c_{\lambda k} + \frac{1}{2}\right)$$

(jetzt kann man auch $[A, E] \sim \delta^T$

ausrechnen durch einsetzen der Modenentwicklung)

4.2. Elektron - Photon - Wechselwirkung

$$\underline{H} = \underline{H}_0 + \underline{H}_{WW}$$

freies Strahlungsfeld

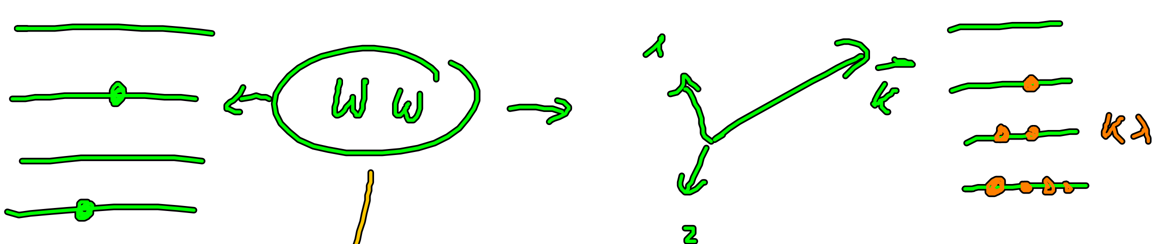
\+ freies Elektronenfeld

Wechselwirkung

ck

$$\underline{H}_0 = \sum_n \underbrace{\hbar\omega_n}_{\varepsilon_n} a_n^+ a_n + \sum_{\lambda k} \hbar\omega_k c^+_{\lambda k} c_{\lambda k}$$

Vielteilchen-System



Dipolnäherung

$$H^{(1)}_{WW} = \underbrace{\sum_i q_i \vec r_i(t)}_{} \cdot \vec E(\cancel{\vec r_i}, t), \quad \vec r_i \to 0$$

Dipol von Elektron
in 1. Quantisierung
im elektr. Feld

$$\underline{H}_{WW}^{(2)} = \int d^3r \; \underline{\psi}^+(\vec r,t)\, q\vec r \; \underline{\psi}(\vec r,t) \cdot \underline{\vec E}(t)$$

Umrechnung von Einteilchenoperator in 2. Quantisierung.

stationäre Schrödingergl. (z.B. H-Atom)

$$= \sum_{n_1 n_2} \underbrace{\int d^3r \; \varphi^*_{n_1}(\vec r)\, q\vec r \; \varphi_{n_2}(\vec r)}_{\text{atomares Dipolmoment } \vec d_{n_1 n_2}} a^+_{n_1}(t)\, a_{n_2}(t) \; \underline{\vec E}(t)$$

einsetzen der Modenentwicklung

$$= \sum_{\substack{n_1 n_2 \\ \lambda, k}} \underbrace{\vec d_{n_1 n_2} \cdot i g_k \vec e_{k\lambda}}_{g^{k\lambda}_{n_1 n_2}} a^+_{n_1} a_{n_2} c_{\lambda k} + h.a.$$

$$H_{WW} = \sum_{\substack{n_1 n_2 \\ \lambda k}} g^{\lambda k}_{n_1 n_2} \, a^+_{n_1} a_{n_2} c_{\lambda k} + h.a.$$

Interpretation analog zu Phononen:

Photon vernichtg →

elektronischer Übergang

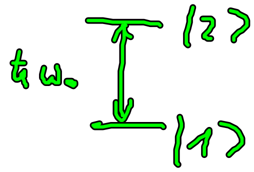
Absorption Emission

Hamiltonoperator einfach gestalten :

„Drehwellennäherung“

„rotating wave approximation“

<u>zunächst</u> freies Feld : $a_1^\dagger a_2 \sim e^{\overbrace{i(\omega_1-\omega_2)}^{<0} t} = e^{-i\omega_0 t}$



$$c_{\lambda k}^{(+)} \sim e^{(\pm) i \omega_k t}$$

man nimmt nur Terme mit, die in Resonanz sind

$\omega_0 \approx \omega_k$, 2 Niveau :

$$\underline{H}_{WW} = \sum_{k\lambda} \left(g_{12}^{k\lambda} a_1^\dagger a_2 c_{\lambda k}^\dagger + g_{21}^{k\lambda} a_2^\dagger a_1 c_{\lambda k} \right)$$

$\sim e^{-i\omega_0 t} \cdot e^{i\omega_k t}$ $\qquad$ $\sim e^{i\omega_0 t}\, e^{-i\omega_k t}$

$\omega_0 \approx \omega_k$

$+ \cancel{e^{\pm i(\omega_0 + \omega_k) t}}$ $\qquad$ RWA

Sind typischerweise nicht energieerhaltende Prozesse und nur auf sehr kurze Zeitskala wichtig.

V. klein

$\uparrow$

$\Delta E \cdot \Delta t \sim$ konst

$\downarrow$

groß $\qquad$ Energieerhaltung findet nur auf lange Zeitskala statt

bei Bewegungsgleichung. $\qquad$ mitdrehende $\qquad$ gegenläufige

$$\langle a_1^{\dagger} a_2 \rangle \sim \frac{1}{\omega_0 - \omega_k} + \frac{1}{\omega_0 + \omega_k}$$

Dipoldichte