4.3. Bewegungsgleichungen für Observable

Beschreibung von Observablen: zentral f. Elektronen $a^+_{n_1} a_{n_2}$ $\quad n_2 \downarrow n_1$

$\langle \psi^+(\vec r,t)\, \psi(\vec r,t)\rangle$ $\quad$ „Übergangsamplitude"

<u>Elektronendichte</u> $\quad n_{el}(\vec r,t) = \sum_{n_1 n_2} \varphi^*_{n_1}(\vec r)\, \varphi_{n_2}(\vec r) \left\langle a^+_{n_1}\, a_{n_2} \right\rangle (t)$

<u>Dipoldichte</u> $\quad P(\vec r,t) = \sum_{n_1 n_2} \varphi^*_{n_1}(\vec r)\, q\vec r\, \varphi_{n_2}(\vec r) \langle a^+_{n_1}\, a_{n_2}\rangle (t)$

<u>Stromdichte</u> $\quad \vec j(\vec r,t) = \sum_{n_1 n_2} \varphi^*_{n_1}(\vec r)\, \frac{q\vec p}{m}\, \varphi_n(\vec r) \langle a^+_{n_1}\, a_{n_2}\rangle (t)$

<u>a) Übergangsamplitude</u> $\quad \langle a^+_1 a_2\rangle$ $\quad 2 \updownarrow 1$ $\quad$ Zweiniveausystem

$$-i\hbar\, \partial_t\, a_1^+ a_2 = \left[H, a_1^+ a_2\right] = \left[H_0 + H_{WW}, a_1^+ a_2\right]$$

Bewegungsgleichung

(Heisenbergbewegungsgl.)

einfach, bekannt

in der letzt VL — „vergessen" $\rightarrow$ $H_{WW} = -q\sum \vec r_i\, \delta(\vec r_i - \vec r)\cdot E$

$$\left[H_{WW}, a_1^+ a_2\right] = -\sum_{\lambda k} g^{\lambda k}_{21}\, c_{\lambda k} \left[a_2^+ a_1, a_1^+ a_2\right] + \sim \underbrace{\left[a_1^+ a_2, a_1^+ a_2\right]}$$

letzte VL

$$\overbrace{[c^{(+)}, a_-^{(+)}]}^{=0} \quad \text{(zur selbe Zeit)}$$

$$= -\sum_{\lambda k} g_{21}^{\lambda k} \, c_{\lambda k} \left(\underbrace{a_2^+ a_1 a_1^+ a_2}_{} - \underbrace{a_1^+ a_2 a_2^+ a_1}_{} \right)$$

Versuch, den aus dem 1. Term zu kombinieren

$$a_2^+ (1 - a_1^+ a_1) a_2$$

$$= a_2^+ a_2 - a_1^+ a_2^+ a_2 a_1$$

$$= a_2^+ a_2 - a_1^+ (1 - a_2 a_2^+) a_1$$

$$= a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1$$

$$\partial_t a_1^+ a_2 = i(\omega_1 - \omega_2) a_1^+ a_2 \qquad \text{(aus } H_0\text{)}$$

$$- i \sum_{\lambda k} \tilde{g}_{21}^{\lambda k} \, c_{\lambda k} \left(a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1 \right)$$

$$\tilde{g} = \frac{g}{\hbar} \qquad \text{(aus } H_{ww}\text{)}$$

Hierarchieproblem: Wenn ein Vielteilchen H vorliegt,

z.B. $H_{el-photon}$ beinhaltet mehr als 2 Operatoren
$\phantom{z.B. H_{el}}$-phonon
$\phantom{z.B. H_{el}}$-elektron

$$\Longrightarrow \langle a^+ a \rangle \xrightarrow{\text{koppelt}} \langle a^+ a\, c \rangle, \quad \langle a^+ a^+ a\, a \rangle \;\hat{=}\; \text{höhere Erwartungswerte}$$

$$\langle a^+ a\, c^+ c \rangle \xleftarrow{\text{Gleichg.}}$$

$$\underline{\underline{\langle a^+ a^+ a^+ a\, a\, a \rangle}}$$

man bekommt Kopplg an höherwertige Operatorterme $\Longrightarrow$ Problem, weil das nicht aufhört $\Longrightarrow$ Zwang zu Näherungen

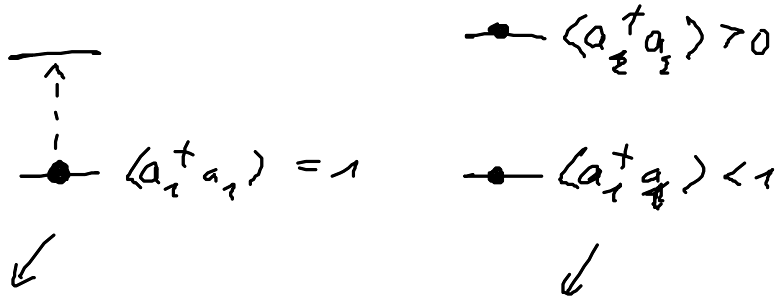
Interpretation: freie Bewgg.:

$$i(\omega_1 - \omega_2)\, a_1^+ a_2$$

Kopplg an Strahlg.:

$$(a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1)\, c_{\lambda k}$$

der Oszillator $\partial_t a_1^+ a_2$ wird getrieben durch $c_{\lambda k}$ und durch die Differenz der „Besetzungszahlen“:



optimale Ankopplg. schlechte Ankopplg.

„Pauliblocking" durch Plusquantisierg.

b) Feldvariable

$$-i\hbar\,\partial_t\, \dot{c}_{\lambda k} = [H, c_{\lambda k}]$$

$$[H_{WW}, c_{\lambda k}] = -\sum_{\lambda' k'} g_{12}^{k'\lambda'}\, a_1^+ a_2 \underbrace{[c^+_{\lambda' k'}, c_{\lambda k}]}_{-\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{kk'}} + \sim \underbrace{[c_{\lambda' k'}, c_{\lambda k}]}_{=0}$$

$$\dot{c}_{\lambda k} = -i\omega_k c_{\lambda k} + i g_{12}^{k\lambda}\, a_1^+ a_2$$

freie Bewegg.

WW, $c_{\lambda k}$ wird durch die Übergangsamplitude getrieben

Gleichg. f. c^+ durch h.c. von $\dot{c}$

c) Besetzungszahlen $a_i^+ a_i \;, \; i = 1,2$

$$\partial_t a_1^+ a_1 = -i \sum_{\lambda k} \tilde{g}_{21}^{\lambda k} \, c_{\lambda k} \, a_2^+ a_1 + h.a. = -\partial_t a_2^+ a_2$$

$$\partial_t \underbrace{\left(a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2 \right)}_{\text{Zahl der Elektronen im System} = 1} = 0$$

$$\boxed{\langle a_1^+ a_1 \rangle + \langle a_2^+ a_2 \rangle = 1}$$

d) Photonenzahl (Spitze: Intensität)

$$\hat{n}_{ph} = \sum_{\lambda k} \underbrace{c_{\lambda k}^+ c_{\lambda k}}_{\text{Photonenzahl in 1 Mode}}$$

$$\partial_t \langle \hat{n}_{ph} \rangle = -\partial_t \langle a_2^+ a_2 \rangle$$

für jedes Photon daß entsteht,
muß ein Elektron von $|2\rangle \longrightarrow |1\rangle$
übergehen („−" Vorzeichen)

4.4. Spontane und induzierte Prozesse

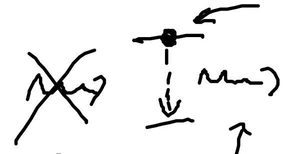
induziert: $n \neq 0$ Photonenzahl $\neq 0$

spontan: $n = 0$, finden statt wenn kein Photon da sind

$\longrightarrow$ Quantenmechanik:

spontane Prozesse sind am interessantesten

$\langle a_2^+ a_2 \rangle \neq 0$



$n=0$

an den Vakuumzustand abgegeben

interessieren uns für $f_2 = \langle a_2^+ a_2 \rangle$, also mittlere Besetzungszahl oben

$$\partial_t \langle a_2^+ a_2 \rangle = i \sum_{\lambda k} \tilde{g}_{21}^{\lambda k} \langle \underbrace{c_{\lambda k} a_2^+ a_1}_{\text{Problem}} \rangle + h.c.$$

Idee: Störungstheorie in $\tilde{g}$

$$\partial_t \langle c_{\lambda k} a_2^+ a_1 \rangle = \langle (\partial_t c_{\lambda k}) a_2^+ a_1 \rangle + \langle c_{\lambda k} (\partial_t a_2^+ a_1) \rangle$$

sind bekannt

$(\omega_1 - \omega_2)$

$$= -i(\omega_k + \omega_{12}) \langle c_{\lambda k}\, a_2^\dagger a_1 \rangle$$ freier Anteil

$$+ i \sum_{\lambda' k'} \tilde{g}^{\lambda k}_{21} \langle a_1^\dagger a_2\, a_2^\dagger a_1 \rangle \longrightarrow \langle a_1^\dagger (1 - a_2^\dagger a_2)\, a_1 \rangle$$

$$\langle a_1^\dagger a_1 \rangle - \underbrace{\langle a_1^\dagger a_2^\dagger a_2 a_1 \rangle}_{=0\ *}$$

$$+ i \sum \tilde{g}^{\lambda k}_{21} \big\langle (a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1) \big\rangle \big\langle c_{\lambda k}\, c^\dagger_{\lambda' k'} \big\rangle$$

$\Uparrow$

__Idee:__ Hierarchieproblem durch Zerschlagen der Erwartungswerte erledigen: in schwacher Kopplung wird unabhängige Bewegung angenommen

*: weil nur 1 Elektron im System ist und 2x vernichtet wird $\Rightarrow$ Nullzustand

$$\langle c_{\lambda k}\, c^\dagger_{\lambda' k'} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{kk'} + \underbrace{\langle c^\dagger_{\lambda' k'}\, c_{\lambda k} \rangle}_{\langle c^\dagger_{\lambda k}\, c_{\lambda k} \rangle\, \delta_{\lambda\lambda'}\delta_{kk'}}$$

weil Photonen ein „Bad" bilden,
(aber streng genommen sollte man das untersuchen)

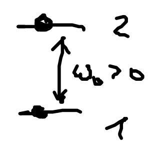
$n_{k\lambda} : \langle c^\dagger_{\lambda k} c_{\lambda k} \rangle$

$f_1 : \langle a_1^\dagger a_1 \rangle$

$f_2 : \langle a_2^\dagger a_2 \rangle$

$$\partial_t \underbrace{\langle c_{\lambda k}\, a_2^\dagger a_1 \rangle}_{S^{12}_{\lambda k}} = -i(\omega_k + \underbrace{\omega_{12}}_{-\omega_0 = \omega_1 - \omega_2 < 0}) \langle c_{\lambda k}\, a_2^\dagger a_1 \rangle (t) + i\, g^{\lambda k}_{12} \underbrace{\Big(f_2(t) + \big(\underbrace{f_2(t) - f_1(t)}_{\text{Inversion } \Delta_{21}}\big) n_{k\lambda} \Big)}_{F(t)}$$

(oben minus unten)



$$S^{12}_{\lambda k} = \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t-t')}\, F(t')$$

einsetzen in $\dot f_2$ von oben

$$\dot f_2 = -2 \sum_{\lambda k} |\tilde g^{\lambda k}_{12}|^2 \,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t-t')}\, F(t') \right)$$

h.a.

2. Ordnung Störungstheorie

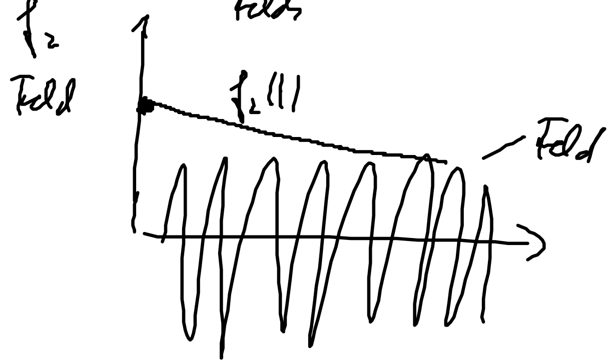
Funktion von $f_2(t')$

implizite Gleichung f. $f_2(t)$

$$= -2 \sum_{\lambda k} |g^{\lambda k}_{12}|^2 \,\mathrm{Re}\left(\int_0^\infty ds \, e^{-i(\omega_k-\omega_0)s} \underbrace{F(t-s)} \right)$$

langsam veränderliche Größe gegen alle Oszillatoren d. Felds

$$s = t - t'$$



$\to s = 0$ in $F(t-s)$

$$\dot\rho_2 = -2 \sum_{\lambda k} |g^{\lambda k}_{12}|^2 \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega_k-\omega_0)^2}} F(t)$$

Lösung d. Zeitintegral $\int ds \ldots$
und Konvergenz erzeugender Faktor γ

$$\mathrm{Re} \int_0^\infty ds \, e^{-i(\omega_k-\omega_0)s} \, e^{-\gamma s}$$

Beitrag in $\dot\rho = -\gamma \rho$
phänomenologisch um
höhere Beiträge der Hierarchie zu approximieren

$\gamma \to 0$ später

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{[-i(\omega_k-\omega_0)-\gamma]s}}{-i(\omega_k-\omega_0)-\gamma} \right)\Bigg|_0^\infty = \frac{\gamma}{(\omega_k-\omega_0)^2+\gamma^2} \xrightarrow{\gamma\to 0} \delta(\omega_k-\omega_0)\cdot\pi$$

nicht RWA Terme $\omega_k+\omega_0$
(letzte VL)

Diese Näherungen bringen E-Erhaltung (RWA + langsame Näherung $F(t-\cancel{s})$)

$$\dot{\rho}_2 = -\Gamma\rho_2 - \Gamma(\rho_2-\rho_1)\,n_0$$

Gleichung für die Elektronenbesetzungszahl im Niveau 2

Γ = Rate der WW mit Photon

$$= \underbrace{2\sum_{\lambda k} |\hat{g}_{12}^{\lambda k}|^2 \frac{\gamma}{\gamma^2+(\omega_k-\omega_0)^2}\Bigg|_{\gamma\to 0}}_{\text{sieht aus wie Fermis goldene Regel f. } \gamma\to 0}$$

n_0 : ist Photonzahl bei $\omega_k = \omega_0$

$$\dot{n}_0 = +\Gamma\rho_2 + \Gamma(\rho_2-\rho_1)\,n_0$$

aus $\dot{n} = -\partial_t \rho_2$

Gleichung für die Photonzahl in Mode λk

mit der Übergangsfrequenz ω_0.

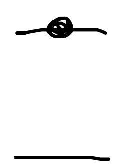
a) Spontane Emission

$$n_0 \to 0$$

$$\dot{n}_0 = \Gamma \rho_2 \quad , \quad \dot{\rho}_2 = -\Gamma \rho_2$$

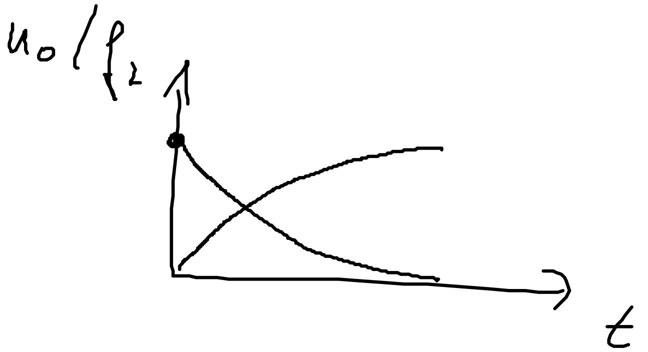
Anfangsbedingung: $\rho_2(t=0) = \rho_2^0$

$n_0(t=0) = 0$



$$\rho_2 = e^{-\Gamma t} \rho_2^0 \longrightarrow \dot{n}_0 = \Gamma e^{-\Gamma t} \rho_2^0$$

$$n_0 = \left(1 - e^{-\Gamma t}\right) \rho_2^0$$



durch Übergang des Elektrons $1 \to 2$ findet eine Emission in das Vakuumfeld statt und das Strahlungsfeld wird mit Photonen besetzt

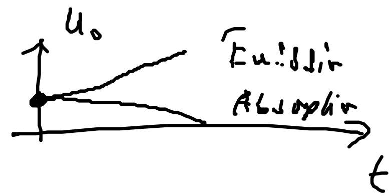
b) stimulierte Emission

$n_0 \gg 1$

$$\dot{n}_0 = \Gamma\,(\rho_2 - \rho_1)\, n_0$$

$$\dot{\rho}_2 = -\Gamma\,\underbrace{(\rho_2 - \rho_1)}_{\text{Inversion } \Delta_{21} \,=\, \text{festhalten}}\, n_0$$

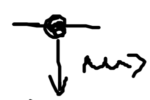
$$n_0 = e^{\Gamma \Delta_{21} t}\, n_0^0$$



abhängig von der Inversion ob Emission oder Absorption

Emission $\quad \Delta_{21} = (\rho_2 - \rho_1) > 0$

mehr Elektronen oben



Absorption $\quad \Delta_{21} = (\rho_2 - \rho_1) < 0$

mehr Elektronen unten