4.3. Bewegungsgleichungen für Observable

Beschreibung von Observablen: zentral f. Elektronen $a^+_{n_1} a_{n_2}$ n_2 n_1

$\langle \psi^+(\vec r,t)\, \psi(\vec r,t)\rangle$ „Übergangsamplitude"

Elektronendichte $n_{el}(\vec r,t) = \sum_{n_1 n_2} \varphi^*_{n_1}(\vec r)\, \varphi_{n_2}(\vec r) \langle a^+_{n_1} a_{n_2}\rangle(t)$

Dipoldichte $P(\vec r,t) = \sum_{n_1 n_2} \varphi^*_{n_1}(\vec r)\, q\vec r\, \varphi_{n_2}(\vec r) \langle a^+_{n_1} a_{n_2}\rangle(t)$

Stromdichte $\vec j(\vec r,t) = \sum_{n_1 n_2} \varphi^*_{n_1}(\vec r)\, \frac{q\vec p}{m}\, \varphi_{n}(\vec r) \langle a^+_{n_1} a_{n_2}\rangle(t)$

a) Übergangsamplitude

$\langle a^+_1 a_2\rangle$ 2 1 Zweiniveausystem

$$-i\hbar\,\partial_t\, a_1^+ a_2 = [H, a_1^+ a_2] = [H_0 + H_{WW}, a_1^+ a_2]$$

Bewegungsgleichung

(Heisenberg-Bewegungsgl.)

einfach, bekannt

$H_{WW} =$

in der letzten VL „$-$" vergessen $\rightarrow$ $-q\sum \vec r_i\, \delta(\vec r_i - \vec r)\cdot E$

$$[H_{WW}, a_1^+ a_2] = -\sum_{\lambda k} g_{21}^{\lambda k}\, c_{\lambda k} [a_2^+ a_1, a_1^+ a_2] + \sim \underbrace{[a_1^+ a_2, a_1^+ a_2]}$$

letzte VL

$$\underbrace{}_{[c^{(+)}, a^{(+)}] \text{ (zur selben Zeit)}} = 0$$

$$= -\sum_{\lambda k} g_{21}^{\lambda k} c_{\lambda k} \left(\underbrace{a_2^+ a_1 a_1^+ a_2} - \underbrace{a_1^+ a_2 a_2^+ a_1} \right)$$

Versuch, den am
den 1. Term zu
kombinieren

$$a_2^+ (1 - a_1^+ a_1) a_2$$

$$= a_2^+ a_2 - a_1^+ a_2^+ a_2 a_1$$

$$= a_2^+ a_2 - a_1^+ (1 - a_2 a_2^+) a_1$$

$$= a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1$$

$$\partial_t a_1^+ a_2 = i(\omega_1 - \omega_2) a_1^+ a_2 \quad \text{(aus } H_0\text{)}$$

$$- i \sum_{\lambda k} \tilde{g}_{21}^{\lambda k} c_{\lambda k} \left(a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1 \right)$$

$$\tilde{g} = \frac{g}{\hbar} \qquad \text{(aus } H_{WW}\text{)}$$

<u>Hierarchieproblem</u>: Wenn ein Vielteilchen H vorliegt,

z.B. Hel-photon beinhaltet mehr als 2 Operatoren
- phonon
- elektron

$$\Rightarrow \langle a^+ a \rangle \longrightarrow \langle a^+ a\, c \rangle \;\hat{=}\; \text{höhere Erwartungswerte}$$

koppelt $\langle a^+ a^+ a\, a \rangle$

Gleichg.

$$\langle a^+ a\, c^+ c \rangle$$

$$\langle a^+ a^+ a^+ a\, a\, a \rangle$$

man bekommt Kopplung an höherwertige Operatorterme $\Rightarrow$ Problem,
weil das nicht aufhört $\Rightarrow$ Zwang zu Näherungen

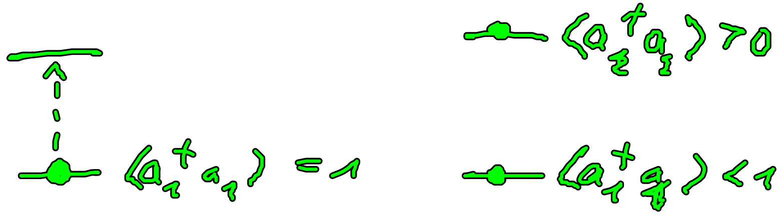
Interpretation: Freie Bewegg.:

$$i(\omega_1 - \omega_2)\, a_1^+ a_2$$

Kopplung an Stellg.:

$$(a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1)\, c_{\lambda k}$$

der Oszillator $\partial_t a_1^+ a_2$ wird getrieben durch $c_{\lambda k}$
und durch die Differenz der
„Besetzungszahlen":



optimale Ankopplg. schlechte Ankopplg.

„Pauliblocking" durch Plusquantisierg.

b) Feldvariable

$$-i\hbar\partial_t \dot{c}_{\lambda k} = [H, c_{\lambda k}]$$

$$[H_{WW}, c_{\lambda k}] = -\sum_{\lambda' k'} g_{12}^{k'\lambda'} a_1^+ a_2 \underbrace{[c^+_{\lambda' k'}, c_{\lambda k}]}_{-\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{kk'}} + \sim \underbrace{[c_{\lambda' k'}, c_{\lambda k}]}_{=0}$$

$$\dot{c}_{\lambda k} = -i\omega_k c_{\lambda k} + i g_{12}^{k\lambda} a_1^+ a_2$$

freie Bewegg.

WW, $c_{\lambda k}$ wird durch die Übergangsamplitude getrieben

Glchg. f. c^+ durch h.c. von $\dot{c}$

c) Besetzungszahlen $a_i^+ a_i$, $i = 1, 2$

$$\partial_t a_1^+ a_1 = -i \sum_{\lambda k} \tilde{g}_{21}^{\lambda k} \, c_{\lambda k} \, a_2^+ a_1 + h.a. = -\partial_t a_2^+ a_2$$

$$\partial_t \big(\underbrace{a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2}_{} \big) = 0$$

Zahl der Elektronen im System $= 1$

$$\boxed{\langle a_1^+ a_1 \rangle + \langle a_2^+ a_2 \rangle = 1}$$

d) Photonenzahl (später: Intensität)

$$\hat{n}_{ph} = \sum_{\lambda k} \underbrace{c_{\lambda k}^+ \, c_{\lambda k}}_{}$$

Photonenzahl in 1 Mode

$$\partial_t \langle \hat{n}_{ph} \rangle = -\partial_t \langle a_2^+ a_2 \rangle$$

für jedes Photon, daß entsteht,
muß ein Elektron von $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$
übergehen („$-$" Vorzeichen)

4.4. Spontane und induzierte Prozesse

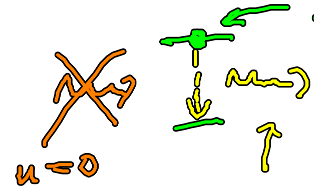
induziert: $n \neq 0$ Photonenzahl $\neq 0$

spontan: $n = 0$, finden statt wenn kein Photon da sind

$\longrightarrow$ Quantenmechanik:

spontane Prozesse sind am interessantesten

$\langle a_2^\dagger a_2 \rangle \neq 0$



an den Vakuumzustand abgegeben

interessieren uns für $\rho_2 = \langle a_2^\dagger a_2 \rangle$, also mittlere Besetzungszahl oben

$$\partial_t \langle a_2^\dagger a_2 \rangle = i \sum_{\lambda k} \hat{g}_{21}^{\lambda k} \underbrace{\langle c_{\lambda k} a_2^\dagger a_1 \rangle}_{\text{Problem}} + \text{h.a.}$$

Idee: Störungstheorie in $\hat{g}$

$$\partial_t \langle c_{\lambda k} a_2^\dagger a_1 \rangle = \langle (\partial_t c_{\lambda k}) a_2^\dagger a_1 \rangle + \langle c_{\lambda k} (\partial_t a_2^\dagger a_1) \rangle$$

sind bekannt

$(\omega_1 - \omega_2)$

$$= -i(\omega_k + \omega_{12}) \langle c_{\lambda k}\, a_2^\dagger a_1 \rangle$$ freier Anteil

$$+ i \sum_{\lambda' k'} \tilde{g}^{\lambda k}_{21} \langle a_1^\dagger a_2\, a_2^\dagger a_1 \rangle \rightarrow \langle a_1^\dagger (1 - a_2^\dagger a_2) a_1 \rangle = \langle a_1^\dagger a_1 \rangle - \underbrace{\langle a_1^\dagger a_2^\dagger a_2 a_1 \rangle}_{=0\,*}$$

$$+ i \sum \tilde{g}^{\lambda k}_{21} \langle (a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1) \rangle \langle c_{\lambda k}\, c^\dagger_{\lambda' k'} \rangle$$

<u>Idee</u>: Hierarchieproblem durch Zerschlagen des Erwartungswerte erledigen: in schwacher Kopplung wird unabhängige Bewegg. angenommen

$*$: weil nur 1 Elektron im System ist und 2x vernichtet wird → Nullzustand

$$\langle c_{\lambda k}\, c^\dagger_{\lambda' k'} \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{kk'} + \underbrace{\langle c^\dagger_{\lambda' k'}\, c_{\lambda k} \rangle}_{\langle c^\dagger_{\lambda k}\, c_{\lambda k} \rangle \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{kk'}}$$

weil Photonen ein „Bad" bilden, (aber streng genommen sollte man das untersuchen)

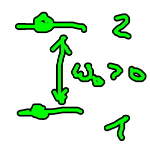
$u_{k\lambda}$: $\langle c^\dagger_{\lambda k}\, c_{\lambda k} \rangle$

ρ_1 : $\langle a_1^\dagger\, a_1 \rangle$

ρ_2 : $\langle a_2^\dagger\, a_2 \rangle$

$$\partial_t \underbrace{\langle c_{\lambda k}\, a_2^\dagger a_1 \rangle}_{S^{12}_{\lambda k}} = -i(\omega_k + \underset{\substack{\parallel \\ -\omega_0 = \omega_1 - \omega_2 < 0}}{\omega_{12}}) \langle c_{\lambda\lambda}\, a_2^\dagger a_1 \rangle (t)$$

$$\underbrace{+\, i\, g^{\lambda k}_{12} \left(\rho_2(t) + \underbrace{\left(\rho_2(t) - \rho_1(t) \right)}_{\text{Inversion } \Delta_{21} \text{ (oben minus unten)}} u_{k\lambda} \right)}_{F(t)}$$



$$S^{12}_{\lambda k} = \int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t-t')}\, F(t')$$

einsetzen in $\dot{\rho}_2$ von oben

$$\dot{\rho}_2 = -2 \sum_{\lambda k} |\tilde{g}^{\lambda k}_{12}|^2\, \mathrm{Re} \left(\int_{-\infty}^{t} dt'\, e^{-i(\omega_k - \omega_0)(t-t')}\, F(t') \right)$$

u.a.

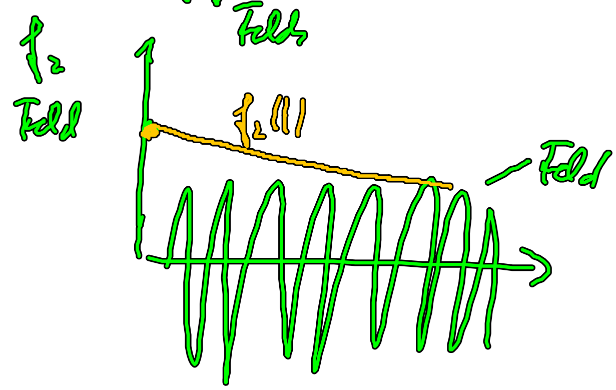
2. Ordnung Störungstheorie

Funktion von $\rho_2(t')$

implizite Gleichung f. $\rho_2(t)$

$$= -2 \sum_{\lambda k} |g^{\lambda k}_{n2}|^2 \, \mathrm{Re}\left(\int_0^\infty ds \, e^{-i(\omega_k - \omega_0)s} \underbrace{F(t-s)}_{\text{langsam veränderliche Größe gegen alle Oszillatoren d. Felds}} \right)$$

$$s = t - t'$$



$\rightarrow$ $s = 0$ in $F(t-s)$

$$\dot{\rho}_2 = -2 \sum_{\lambda k} |g^{\lambda k}_{n2}|^2 \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega_k - \omega_0)^2}}_{\text{Lösung d. Zeitintegral } \int ds \ldots \text{ und konvergenzerzeugender Faktor } \gamma} F(t)$$

$$\mathrm{Re} \int_0^\infty ds \, e^{-i(\omega_k - \omega_0)s} \, e^{-\gamma s}$$

Beitrag in $\dot{\rho} = -\gamma \rho$
phänomenologisch um
höhere Beiträge der Hierarchie zu approximieren

$\gamma \rightarrow 0$ später

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{[-i(\omega_k-\omega_0)-\gamma]s}}{-i(\omega_k-\omega_0)-\gamma}\right)\Bigg|_0^\infty = \frac{\gamma}{(\omega_k-\omega_0)^2+\gamma^2} \xrightarrow{\gamma\to 0} \delta(\omega_k-\omega_0)\cdot\pi$$

nicht RWA Terme $\omega_k+\omega_0$ (leicht VL)

Diese Näherungen bringen E-Erhaltung (RWA + Langsame Näherung $F(t-\cancel{s})$)

$$\dot{\rho}_2 = -\Gamma\rho_2 - \Gamma(\rho_2-\rho_1)\,n_0$$

Gleichung für die Elektronenbesetzungszahl im Niveau 2

$$\Gamma = \text{Rate der WW mit Photon}$$

$$= \underbrace{2\sum_{\lambda k}\left|\hat{g}_{12}^{\lambda k}\right|^2 \frac{\gamma}{\gamma^2+(\omega_k-\omega_0)^2}\Bigg|_{\gamma\to 0}}$$

sieht aus wie Fermis goldene Regel f. $\gamma\to 0$

n_0 : ist Photonzahl bei $\omega_k=\omega_0$

$$\dot{n}_0 = +\Gamma\rho_2 + \Gamma(\rho_2-\rho_1)\,n_0$$

aus $\dot{n} = -\partial_t \rho_2$

Gleichung für die Photonzahl in Mode λk

mit der Übergangsfrequenz ω_0.

a) Spontane Emission

$$n_0 \to 0$$

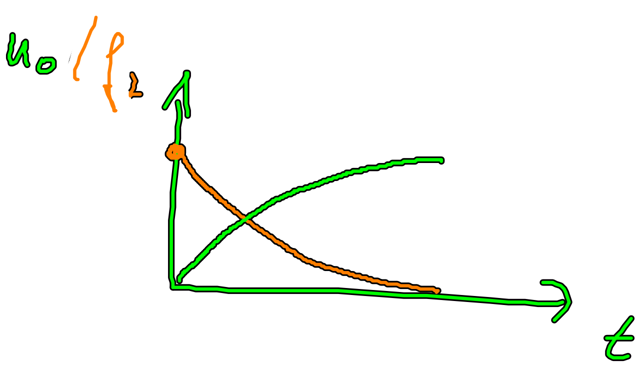
$$\dot{n}_0 = \Gamma \rho_2 \quad , \quad \dot{\rho}_2 = -\Gamma \rho_2$$

Anfangsbedingungen: $\rho_2(t=0) = \rho_2^0$

$$n_0(t=0) = 0$$

$$\rho_2 = e^{-\Gamma t} \rho_2^0 \longrightarrow \dot{n}_0 = \Gamma e^{-\Gamma t} \rho_2^0$$

$$n_0 = \left(1 - e^{-\Gamma t}\right) \rho_2^0$$



durch Übergang der Elektronen $1 \to 2$ findet eine Emission in das Vakuumfeld statt und das Strahlungsfeld wird mit Photonen bevölkert

b) stimulierte Emission

$$u_0 \gg 1$$

$$\dot{u}_0 = \Gamma (\rho_2 - \rho_1)\, u_0$$

$$\dot{\rho}_2 = -\Gamma \underbrace{(\rho_2 - \rho_1)}\, u_0$$

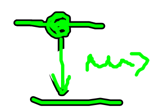
Inversion Δ_{21} = festhalten

$$u_0 = e^{\Gamma \Delta_{21} t}\, u_0^0$$

abhängig von der Inversion ob Emission oder Absorption

Emission $\Delta_{21} = (\rho_2 - \rho_1) > 0$

mehr Elektronen oben



Absorption $\Delta_{21} = (\rho_2 - \rho_1) < 0$

mehr Elektronen unten