4.5. Strahlungsdämpfung und Lambverschiebung

neben spontanen und induzierten Prozessen in der Besetzungszahl der Elektronmoden / Photonmoden

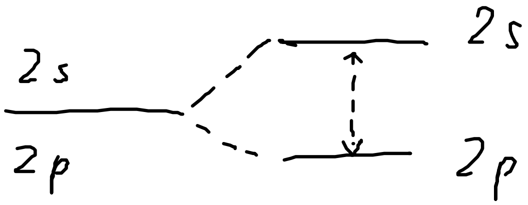
2 weitere wichtige quantenelektrodynamische Effekte:

a) Strahlungsdämpfung:

Abklingen der Dipoldichte durch Emission von Strahlungsenergie in Vakuumfeld

b) Aufhebung von Energieentartungen durch die WW von Elektronen mit dem Strahlungsfeld

(„Lamb-shift")



$(j = \frac{1}{2})$

Dirac:

Entartung

$E = E(n, j)$ entartet

$\Psi = \Psi(n, j, m_j, l)$

W. Lamb, T. Hänsch } Expert

H. Bethe, J. Schwinger ... } Theorie

Sehe weiterhin 2 Niveausystem an

$$\begin{array}{lcl} \text{—— } |2\rangle & & \text{- - -} \\ & \text{bzw} & \text{——— } |1\rangle |2\rangle \\ \text{—— } |1\rangle & & \text{- - - -} \end{array}$$

4.5.1. Strahlungsdämpfung von Zweiniveausystem

Sinnvolle Observable: $\vec{P}(r, t) \longrightarrow$ proportional $\langle a_1^+ a_2 \rangle$

Abschnitt 4.3.:

$$\partial_t \langle a_1^+ a_2 \rangle = \underbrace{i\omega_{12} \langle a_1^+ a_2 \rangle}_{\text{freier Oszillator}} - i \sum_{\lambda k} \underbrace{\tilde{g}_{21}^{k\lambda} \left(\langle a_2^+ a_2 c_{\lambda k} \rangle - \langle a_1^+ a_1 c_{\lambda k} \rangle \right)}_{\text{WW d. Oszillators mit Strahlungsfeld}}$$

$\sim e^{i\omega_{12} t} \langle a_1^+ a_2 \rangle \big|_0$

$\langle a_i^+ a_i c_{\lambda k} \rangle \hat{=}$ photonassistierte Besetzungszahl

Idee f. Störungstheorie f. Hierarchieproblem:

Nährg. auf bestimmter Stufe der Hierachie in Ordnung: g^4.

$$\langle AB\rangle = \langle (\langle A\rangle + \delta A)(\langle B\rangle + \delta B)\rangle$$

$$= \langle A\rangle\langle B\rangle + \langle A\rangle\langle \delta B\rangle + \langle B\rangle\langle \delta A\rangle$$

$$+ \cancel{\langle \delta A\,\delta B\rangle}$$

höhere Fluktuation f.

schwache WW weglassen

$$\langle a_i^\dagger a_i c\rangle \rightarrow \langle a_i^\dagger a_i\rangle\langle c\rangle$$ $\hat{=}$ nullter Nähg.

$$\langle c\rangle = ?$$

- nächste Nähg. wäre 1 Ordng höher, dh.

Glchgn für $\langle a_i^\dagger a_i c_{\lambda k}\rangle$ = ableit. und dort faktorisieren

- damit sind wir in derselben Ordnung wie für die Raten-

gleichgn f. f_2, n_0 aus 4.4.

$$\partial_t \langle a_i^\dagger a_i c_{\lambda k}\rangle = ?$$

$$\partial_t \left(a_i^\dagger a_i c_{\lambda k}\right) = \left(\partial_t a_i^\dagger a_i\right) c_{\lambda k} + a_i^\dagger a_i \left(\partial_t c_{\lambda k}\right)$$

sind aus 4.3 bekannt, einsetzen

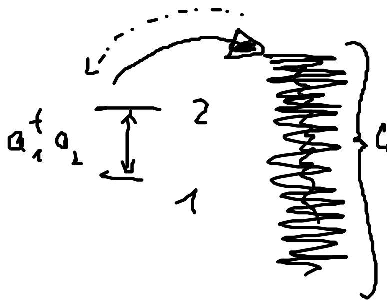
$$= \underbrace{-i\omega_{\lambda k} a_i^\dagger a_i c_{\lambda k}}_{\text{freie Oszillation der Photonen}} + a_i^\dagger a_i i \tilde{g}_{12}^{k\lambda} a_1^\dagger a_2 + \text{Terme} \sim \underbrace{\begin{matrix} c_{\lambda k} c_{\lambda k} \\ c_{\lambda k}^\dagger c_{\lambda k} \end{matrix}}_{\text{schwache Emission: } n_{\lambda k} \ll 1 \text{ Reabsorption wird weggelassen}}$$

$$= -i\omega_{\lambda k} a_i^\dagger a_i c_{\lambda k} + i g_{12}^{k\lambda} \underbrace{a_i^\dagger \left(\delta_{i1} - a_1^\dagger a_i\right) a_2}_{a_1^\dagger a_2 \delta_{i1} - a_i^\dagger a_1^\dagger \underbrace{a_i a_2}_{\text{trägt nicht bei, denn nur 1 Elektron im System und 2 vernichtet}}}$$

$$\partial_t \langle a_1^\dagger a_1 c_{\lambda k}\rangle = -i\omega_{\lambda k} \langle a_1^\dagger a_1 c_{\lambda k}\rangle + i \tilde{g}_{12}^{\lambda k} \underline{\underline{\langle a_1^\dagger a_2\rangle}}$$

Damit ist System von $\partial_t \underline{\underline{\langle a_1^\dagger a_2\rangle}} = \ldots$ (oben) geschlossen.

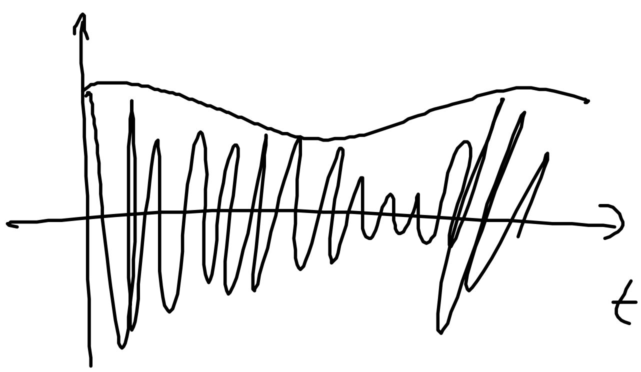
die entstehende Gleichungen sind Musterbeispiel f. WW eines dynamischen mit einem dissipativen System:



$\omega_{\lambda k} = c\,k$ „viele Freiheitsgrade"

Energiefluß nach rechts

$$\langle a_1^+ a_1 c_{\lambda k} \rangle = \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-i\omega_{\lambda k}(t-t')} \, i \tilde{g}_{12}^{k\lambda} \underbrace{\langle a_1^+ a_2 \rangle (t')}$$



Ansatz

$$\langle a_1^+ a_2 \rangle = \underline{\underline{\widetilde{\langle a_1^+ a_2 \rangle}}} \, e^{i\omega_{12} t}$$

ρ_{12} langsam gegen ω_{12}

$$= i \tilde{g}_{12}^{k\lambda} \int_{-\infty}^{t} dt' \, e^{-i\omega_{\lambda k}(t-t')} \, e^{i\omega_{12} t'} \, \tilde{\rho}_{12}(t') \underbrace{e^{-i\omega_{12} t} \, e^{+i\omega_{12} t}}_{1}$$

$$= i \tilde{g}_{12}^{k\lambda} \int^{t} dt' \, e^{-i(\omega_{\lambda k} + \omega_{12})(t-t')} \, \tilde{\rho}_{12}(t') \, e^{i\omega_{12} t}$$

$-\infty$

$$s = t - t'$$

der langsam Größe

$$= i\,\tilde g_{12}^{k\lambda} \int_0^\infty ds\, e^{-i(\omega_{\lambda k}+\omega_{12})s}\, \underline{\tilde p_{12}(t-\cancel{s})}\, e^{i\omega_{12}t}$$

– zeitlich entkoppelte
– Markoff-Näherung.

$$= i\,\tilde g_{12}^{k\lambda} \int_0^\infty ds\, e^{-i(\omega_{\lambda k}+\omega_{12})s}\, p_{12}(t)$$

$e^{-\gamma s}$
als Konvergenz erzeugender Faktor
am Ende $\gamma \to 0$

$$= i\,\tilde g_{12}^{k\lambda}\, \frac{\gamma + i(\omega_{\lambda k}-\omega_0)}{\gamma^2 + (\omega_{\lambda k}-\omega_0)^2} \qquad \omega_0 = -\omega_{12}, \quad \omega_{12} < 0$$

einsetzen in Gleichg. f. Dipoldichte $p_{12}(t)$:

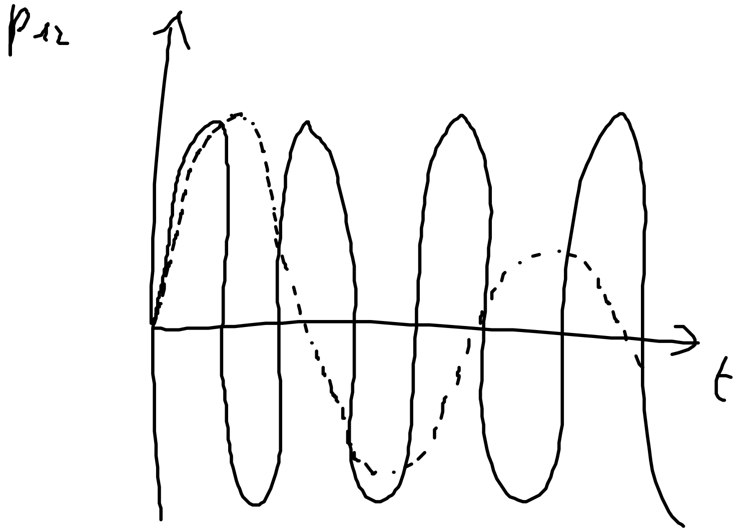
Verschiebung der Oszillatorfrequenz

$$\partial_t\, p_{12}(t) = i\omega_{12}\, p_{12}(t) - \gamma_{rad}\, p_{12}(t) - i\delta_{rad}\, p_{12}(t)$$

Dämpfung des Oszillators

(rad = radiativ)

$$\boxed{e^{-i(\omega_{12}-\delta_{rad})t - \gamma_{rad} t}}$$



qm. Berechnung der Dämpfung und E-Verschiebung:

$$\gamma_{rad} = \sum_{\lambda k} |g_{12}^{\lambda k}|^2 \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega_{\lambda k} - \omega_0)^2}$$

$$\delta_{rad} = \sum_{\lambda k} |g_{12}^{\lambda k}|^2 \frac{\omega_{\lambda k} - \omega_0}{\gamma^2 + (\omega_{\lambda k} - \omega_0)^2}$$

$|g|^2$ bestimmt die Stärke der Dämpfg. / Verschiebg.

in VL 4.4: $\Gamma = 2\gamma_{rad} \equiv \Gamma_{rad}$

Rate der spontanen Emission

$$\dot{\rho}_2 = \langle \dot{a_2^+ a_2} \rangle = -\Gamma \rho_2 \;\dots$$

$$\dot{n}_0 = \Gamma \rho_2$$

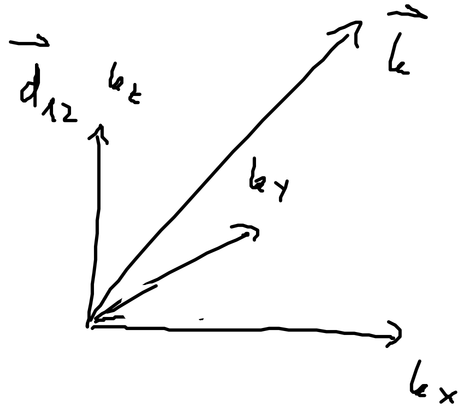
4.5.2. Berechnung der Rate

$$\sum_{\lambda k} \frac{|g_{12}^{\lambda k}|^2}{\hbar^2} \underbrace{\frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega_{\lambda k} - \omega_0)^2}}_{\pi\,\delta(\omega_{\lambda k} - \omega_0) \text{ für } \gamma \to 0} \qquad (\omega_0 = -\omega_{12})$$

$$= \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3k \sum_\lambda \frac{\omega_{\lambda k} |\vec{d}_{12} \cdot \vec{e}_{\lambda(k)}|^2}{\hbar\, 2\varepsilon_0 L^3} \pi\, \delta(\omega_{\lambda k} - \omega_0)$$

$$\omega_{\lambda k} = c|\vec{k}| = \omega_k$$

$$\frac{\pi}{2\varepsilon_0 (2\pi)^3 \hbar} \int_0^\infty dk\, k^2\, \omega_k\, \delta(\omega_k - \omega_0) \int d\Omega \sum_\lambda |\vec{d}_{12} \cdot \vec{e}_{\lambda(k)}|^2$$



$\int$ Winkel ϑ, φ

drehen Winkel integration so, daß ϑ ∢ zwischen $e_{\lambda(1)}$ und d_{12} ist:

$$\longrightarrow \vec d_{12} \cdot \vec e_{\lambda(1)} = d_{12} \cdot 1 \cos\vartheta$$

$$\longrightarrow \int d\Omega \left| \vec d_{12} \cdot \vec e_{\lambda(1)} \right|^2 =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \cos^2\vartheta}_{\int_{-1}^{1} dx\, \underline{x^2} = \frac{1}{3} \cdot 2} = 2\pi \cdot \frac{2}{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\vartheta = x \rightarrow x^2 = \cos^2\vartheta \\ dx = -\sin\vartheta \, d\vartheta \\ 0 \rightarrow 1, \ \cos\pi \rightarrow -1 \end{array} \right.$$

es ergibt sich ein weiterer Faktor 2 da dasselbe für $\vec e_{\lambda(2)}$ gemacht wird

$$\sum_{\lambda} \left| \vec d_{12} \cdot \vec e_{\lambda(\lambda)} \right|^2 = \frac{8\pi}{3} |d_{12}|^2$$

Deltafunktion in $\omega = c k$ machen

alles einsammeln:

$$\boxed{\gamma_{rad} = \frac{|d_{12}|^2 \omega_0^3}{6\pi \varepsilon_0 c^3 \hbar} \sim \omega_0^3 |d_{12}|^2}$$

die betreffend Rate sind proportional zu ω_0^3 bzw d_{12}^2.

typische Zeiten $\hat{=}$ 1 ps (10^{-12} s) bis 1 µs (10^{-6} s).

für Atom, HL usw.

Energieverschiebung δ_{rad} wird in dieser Theorie ∞.

$$\sum_k \frac{\omega_k - \omega_0}{\gamma^2 + (\omega_k - \omega_0)^2} \longrightarrow \infty$$