4.5.3 Störungstheorie zur Beschreibung der Wirkung des Photonvakuums auf elektronische Energien

ΔE_n (1 Elektron im Zustand n, wenn keine Photonen vorliegen) = ?

Erinnerung: Störungstheorie bis 2. Ordnung:

$$\Delta E_n = \langle \varphi_0 | H_{ww} | \varphi_0 \rangle$$

$$+ \sum_x \frac{|\langle \varphi_0 | H_{ww} | \varphi_x \rangle|^2}{\varepsilon_0 - \varepsilon_x}$$

für einen allgemeinen Elektron-Photonzustand

$|\varphi_0\rangle$ ist der ungestörte Zustand mit 1 Elektron in $|n\rangle$ des H-Atoms und keine Photonen in Umgebung.

$$|\varphi_0\rangle = \Big|{}^{1 \;\cdots,\; n,\; n+1 \;\cdots}_{0 \quad\;\; 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\, 0}\Big\rangle \; \underbrace{\Big|{}^{k_1 \lambda_1(k_1),\; k_1 \lambda_2(k_1),\; k_2 \lambda_1(k_2) \;\cdots}_{\quad 0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0}\Big\rangle}_{\text{Photonvakuum}}$$

QZ

Besetzungszahl

$|\varphi_x\rangle$ = alle mögl. anderen Zustände

$$H_{WW} \left(\vec{r}\cdot\vec{E} \text{ oder } \underline{\underline{\vec{p}\cdot\vec{A}}} \right) = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - q\vec{A}\right)^2 \Big|_{\text{1. Quantisierg.}}$$

nehmen diese H

klein elektron. System

große λ_{Licht},

nicht geeignet f.

freies Elektron ($e^{i\vec{k}\vec{r}}$ = ∞ ausgedehnt)

$$H_{WW} = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} \underbrace{- \frac{q\vec{A}\cdot\vec{p}}{m}}_{\text{wesentlicher Term}} + \underbrace{\frac{q^2\vec{A}^2}{2m}}_{\text{trägt auch bei, aber macht nicht die wesentliche Physik}}$$

$$\vec{A} = \sum_{k\lambda} f_k \, \vec{e}_{\lambda(k)} \, e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_k t)} c_{\lambda k} + \text{h.a.}$$

$$H_{WW}^{(2)} = - \sum_{\substack{n_1,n_2\\ \lambda k}} g^{k\lambda}_{n_1 n_2} \, a^{\dagger}_{n_1} a_{n_2} c_{\lambda k} + \text{h.a.}$$

Impuls $\vec{p}$, nicht $\vec{r}$

$$g^{k\lambda}_{n_1 n_2} = \frac{q}{m} \underbrace{\left(2\hbar\omega_k \varepsilon_0 V\right)^{-1/2}}_{f_k} \underbrace{\int d^3r \, \varphi^*_{n_1}(\vec{r}) \, \vec{e}_{\lambda(k)}\cdot\vec{p} \, \varphi_{n_2}(\vec{r})}_{\vec{p}_{n_1 n_2}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$$

eine Näherung, die die wesentliche Inhalte beibehält ist $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \approx 1$

1. Ordnung:

$$\sim \left\langle {n \atop 1} \right| \left\langle {k\lambda \atop 0} \right| a^{\dagger}_{n_1} a_{n_2} c^{(+)}_{\lambda k} \left| {k\lambda \atop 0} \right\rangle \left| {n \atop 1} \right\rangle$$

Elektr., Photon

Vernichter c auf Nullphotonzustand $= 0$

Erzeuger c^{+} auf — " — $\longrightarrow \left| {k\lambda \atop 1} \right\rangle$,

ist orthogonal auf $\left\langle {k\lambda \atop 0} \right| \left. {k\lambda \atop 1} \right\rangle = 0$

$\Longrightarrow$ die erste Ordnung trägt nicht bei

2. Ordnung $\quad |X\rangle = \left| {1 \quad n' \atop 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0} \right\rangle \underbrace{\left| {\cdots\, k\lambda \,\cdots \atop n_{k\lambda}} \right\rangle}_{\text{alle Photonzustände sind erlaubt.}}$

und $n' \neq n$

$$\underbrace{\left\langle {n \atop 1} \right| \left\langle {k\lambda \atop 0} \right|}_{\varphi_0} a^{\dagger}_{n_1} a_{n_2} c^{(+)}_{\lambda k} \left| X \right\rangle$$

1 Photonzustände erlaubt.

$$\Delta E_n = \sum_x \frac{\left| \langle {}^{n}_{1} | \langle {}^{k\lambda}_{0} | a^+_{n_1} a_{n_2} c^{(+)}_{\lambda k} | x \rangle \, g^{k\lambda}_{n_1 n_2} \right|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_x}$$

am Ende Summe über alle $n_1 n_2 \ldots$

Energie des Zustands ψ_0 $\hat{=}$ Energie des Elektrons im H-Atom

Energie des Zustand mit beliebig Stelle n_2 + 1 Photon

(+) → gibt Null weil dann 2 Photonen erzeugt werden

$$= \sum_{n_2 k\lambda} \frac{\left| \langle {}^{n}_{1} | a^+_n a_{n_2} | {}^{n_2}_{1} \rangle \langle {}^{k\lambda}_{0} | c_{\lambda k} | {}^{k\lambda}_{1} \rangle \, g^{k\lambda}_{n n_2} \right|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n_2} - \hbar\omega_k}$$

$n_2 \to n'$

$$\Delta E_n = \sum_{\substack{n' \\ k\lambda}} \frac{\left| g^{k\lambda}_{nn'} \right|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega_k}$$

Energieverschiebung ein elektronischer Zustand n durch die Moden λk des Photonenvakuums.

<u>konkrete Berechnung.</u>: um g_k einsetzen

$$\Delta E_n = \sum_{n'\lambda k} \frac{q^2}{m^2} \frac{1}{2\hbar\omega_k \varepsilon_0 V} \left| \vec{p}_{nn'} \cdot \vec{e}_{\lambda(k)} \right|^2 \frac{1}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega_k}$$

$$= \sum_{n'} \frac{\cancel{V}}{(2\pi)^3} \int dk\, k^2 \underbrace{\sum_\lambda \int d\Omega}_{\frac{8\pi}{3}} \frac{|\vec{p}_{nn'} \cdot \vec{e}_{k\lambda}|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega_k} \frac{q^2}{2\hbar\omega_k \varepsilon_0 \cancel{V} n^2}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{q^2}{2\hbar \varepsilon_0 n^2 c^3} \frac{8\pi}{3} \int_0^\infty d\omega\, \omega \sum_{n'} \frac{|\vec{p}_{nn'}|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega}$$

Glzk VL

$k \to \omega$ als Integration

$$= \frac{1}{6\pi^2} \frac{q^2}{\hbar \varepsilon_0 n^2 c^3} \underbrace{\int_0^\infty d\omega\, \omega \sum_{n'} \frac{|\vec{p}_{nn'}|}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega}}$$

für $\omega \to \infty$ $\quad \int_0^\infty d\omega\, \omega \frac{1}{\omega} \to \infty$

das würde ein ∞ Energieverschiebung entsprechen

$\to$ hier ist was auch wichtig.

Trick: Bethe renormierung (H. Bethe '47)

nichtrelativistische Rechnung

1) freie Elektron ansehen $\to$ gibt auch ∞ Beitrag

analoge Formel aber $|n\rangle \longrightarrow \underbrace{|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\vec{r}}}$

El. in Atom

freie Elektronen

obige Formel gilt für beliebige Zustände

$$\underbrace{\langle n' | \vec{p} | n \rangle}_{\vec{p}_{nn'}} \rightarrow \langle k' | \vec{p} | k \rangle = \int d^3r \, \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}_r \, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{1}{\sqrt{V}}$$

$$= \hbar \vec{k} \, \langle \vec{k}' | \vec{k} \rangle = \hbar \vec{k} \, \delta_{kk'}$$

$$\Delta \bar{E}_{frei} = \underbrace{\frac{q^2}{6\pi^2 \hbar \varepsilon_0 m^2 c^3}} \int d\omega \, \omega \sum_{k'} \frac{(\hbar k)^2 \delta_{kk'}}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k'} - \hbar\omega}$$

$$= \frac{\bar{\alpha}}{2} \int d\omega \frac{\cancel{\omega}}{-\hbar \cancel{\omega}} (\hbar k)^2$$

$$= -\frac{\bar{\alpha}}{2\hbar} (\hbar k^2) \int_0^\infty d\omega \rightarrow \infty$$

$$= -\frac{\alpha}{2} \hbar^2 k^2$$

ist analog in der freien Dispersion der Schrödingergleichung

$$E_{frei} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \Delta E_{frei} = \underbrace{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \alpha \frac{\hbar^2 k^2}{2}}_{\text{meßbare freie Energie}} \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{exp}}$$

$\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$: Energie ohne Strahlungsfeld (ist nicht meßbar)

Idee: man setzt die Energiedispersion mit Strahlungskorrektur

= der experimentell zugänglichen Dispersion (m_{exp})

$$\rightarrow \frac{1}{m_{exp}} = \left(\frac{1}{m} - \alpha \right)$$

$$m_{exp} = \frac{m}{1 - \alpha m}$$

die nackte Elektronenmasse ohne Strahlungsfeld muß derart sein, daß man m_{exp}. [illegible]

$\alpha(m)$

Das Verfahren, den divergenten Anteil der Änderung der nackten Masse zur realen Masse umzuinterpretieren nennt man Massenrenormierung.

2) Anwendung auf gebundene Elektronen

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{r}) + H_{ww} \text{ (El-Photon)}$$

nackte Masse   Kern

ist schlechter Startpunkt, weil m unbekannt, $m \rightarrow m_{exp}$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m_{exp}} + V(\vec{r}) + H_{ww} \text{ (El-Ph)} + \underbrace{\frac{\alpha \vec{p}^2}{2}}$$

ist wirklich E-Korrektur ($\vec{p}$)

mit diesem H wird gerechnet,

aber E-Verschiebung mit $\frac{\alpha \vec{p}^2}{2}$ korrigiert werden

$$\Delta E_n = \frac{\alpha}{2} \left(\int_0^\infty d\omega\, \omega \sum_{n'} \frac{|p_{nn'}|^2}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega} + \int_0^\infty d\omega \frac{\langle n|\vec{p}^2|n\rangle}{\hbar\omega} \right)$$

α (unexp)

Korrektur f. ∞ der freien Elektronen

$$\langle n|\vec{p}^2|n\rangle = \sum_{n} \langle n|\vec{p}\underbrace{|n'\rangle\langle n'|}_{\text{Vollständigkeit}}\vec{p}|n\rangle = \sum_{n'} |p_{nn'}|^2$$

$$\Delta E_n = \frac{\alpha}{2} \int_0^\infty d\omega \cancel{\omega} \sum_{n'} |p_{nn'}|^2 \underbrace{\left(\frac{1}{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega} + \frac{1}{\hbar\omega} \right)}_{\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n'}}{(\varepsilon_n - \varepsilon_{n'} - \hbar\omega)\hbar\cancel{\omega}}}$$

Grenzfall $\omega \to \infty$ $\quad \int d\omega \frac{1}{\omega} \sim \ln\omega \Big|^\infty$

immer noch divergent aber nicht so schlimm wie $\int^\infty d\omega = \omega\Big|^\infty$

- eine relativistische Beschreibung sorgt für eine obere Grenze des Integral die endlich ist :

$$\int_0^{\infty} d\omega \longrightarrow \int^{\frac{m_{exp}c^2}{\hbar}} d\omega$$

physikalischer Grund: $\quad (\omega = ck)$

Compton Wellenlänge $\lambda_c = \frac{h}{m_{exp} c}$ ist die maximale Lokalisierungslänge f. 1. Elektron

→ Photonimpulse oberhalb dieser $\frac{1}{\lambda_c}$ nicht mehr stark beitragen

$$\Delta E = \frac{\alpha}{2} \sum_{n'} |p_{nn'}|^2 (E_{n'} - E_n) \ln \underbrace{\left| \frac{m_{exp} c^2}{E_{n'} - E_n} \right|}$$

ln bedingt aus $\int d\omega$

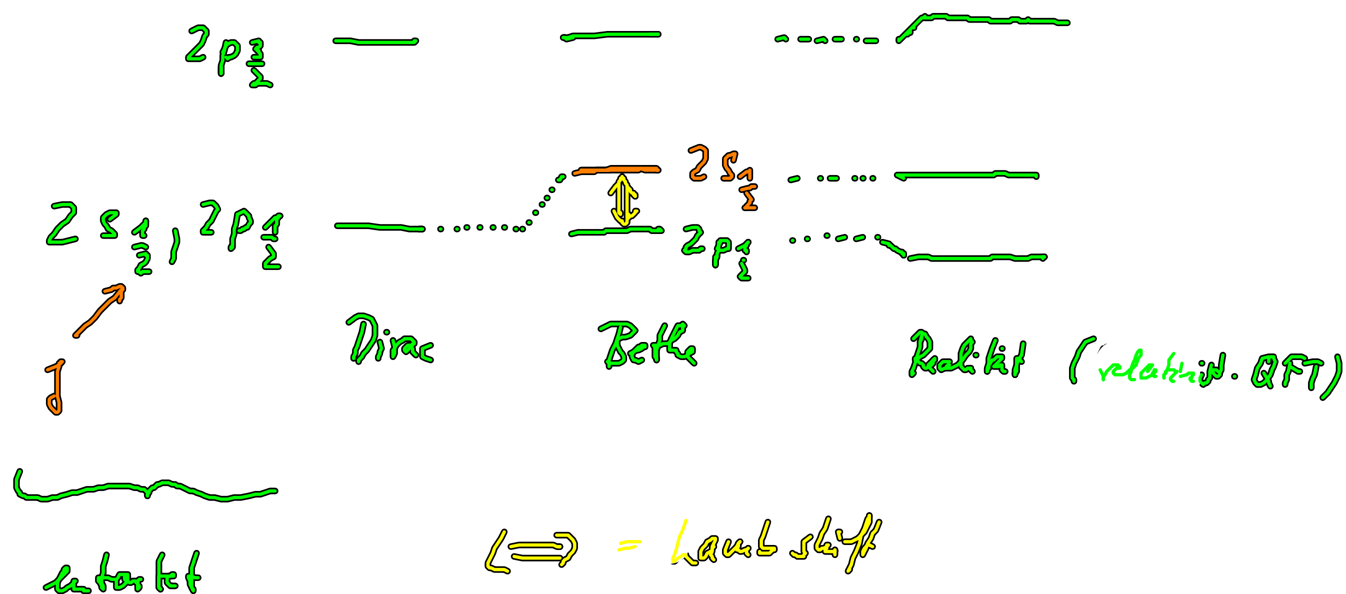
$E_{n'} - E_n \ll m_{exp} c^2$ ergibt weitere Vereinfachung.

$$\boxed{\Delta E \sim |\varphi_n(\vec{r}=0)|^2}$$

Es gibt durch das Strahlungsfeld verursachte E-Verschiebung im H-Atom die proportional zu $|\varphi_n(\vec{r}=0)|^2$ sind.

Das ist für s-Zustände der Fall.

<u>H-Atom</u> $n=2$



⟺ = Lamb shift

Lamb verschiebung

('48 Lamb)