

IV. Landau - und Ginzburg-Landau-Theorie

(Landau 1936)

Grundidee:

In der Nähe von Phasenübergängen (2. oder 1. Ordnung) sind die Ordnungsparameter klein

→ Freie Energie kann in Potenzen des Ordnungsparameters entwickelt werden!

(und zwar so, daß die Symmetrien des Systems, z.B. Invarianz bei Vertauschen der Werte oder Drehung des Ordnungsparameters gewährleistet ist!)

Beispiele für Landau-Erweiterungen (die wir bereits kennen gelernt hatten)

- Ising-Modell (unendliche Dimensionalität)

$$\frac{\beta F}{N} = \frac{\beta J_0}{2} m^2 - \ln 2 \cosh(\beta J_0 m)$$

Landau-Entwicklung ($T \leftrightarrow T_c$)

$$\frac{\beta F}{N} \approx \frac{1}{2} m^2 (\beta J - \beta^2 J^2) + \frac{1}{8} \beta^3 J^4 m^4 - k_B T \ln 2$$

- Van-der-Waals Fluid

$$p = \frac{k_B T}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

vdw-Zustandsgleichung

kleine Abweichung vom Krit.-Punkt:

$$\Delta \tilde{p} = 4 \Delta \tilde{T} - 6 \Delta \tilde{T} \Delta \tilde{v} - \frac{3}{2} \Delta \tilde{v}^3$$
$$\Delta \tilde{T} = \frac{T - T_c}{T_c}$$

IV. 1. Landau-Entwicklung für ^{minimale} homogene Systeme

betrachte ^{frei} Systeme mit

$$F(m, T) = F(-m, T)$$

\uparrow
skalare OT

F ist invariant gegenüber
Vorzeichenwechsel
von m !

Allgemeiner Ansatz für Landau-Entwicklung.

$$F(m, T) = a(T) + \frac{1}{2} b(T) m^2 + \frac{1}{4} c(T) m^4$$
$$+ \frac{1}{6} d(T) m^6 + \dots$$

beachte:

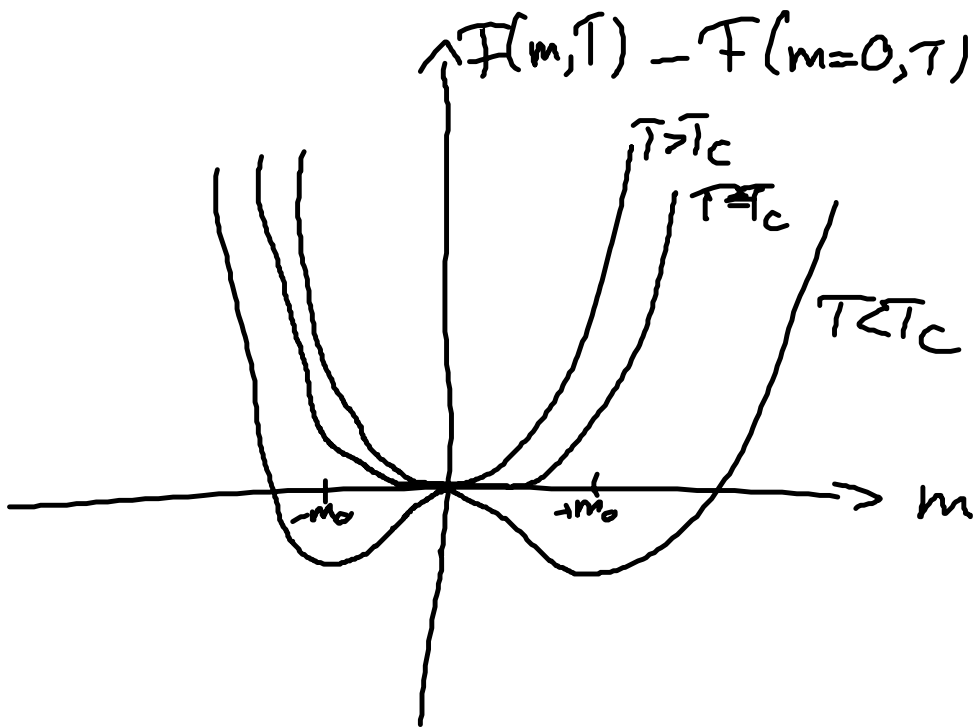
Das Van-der-Waals mikroskopische Modell
ist hier nicht mehr relevant

→ „mesoskopische“ Beschreibungsebene

aber: mikroskop. Modell bestimmt die Koeffizienten
 $a(T), b(T), c(T), d(T)$

Folgerungen aus dem allgemeinen Ansatz?

a) $b(T) = b_0(T - T_c)$ mit $b_0 > 0$
 $c(T) > 0$, $d(T) > 0$ und $c(T) \neq c$
 $d(T) \neq d$



Phasenübergang
 2. Ordnung!

generell: Minimum bestimmt durch $\frac{\partial F}{\partial m} \Big|_T \stackrel{!}{=} 0$

$$(*) \Leftrightarrow b(T)m + c(T)m^3 + d(T)m^5 = 0$$

$T > T_c$: $m=0$ ist Lösung von $(*)$
 und $\frac{\partial^2 F}{\partial m^2} \Big|_{m=0} = b(T) = b_0(T - T_c) > 0$

$T < T_c$. Betrachte Situationen dicht unterhalb T_c

$\rightarrow m$ klein

\rightarrow vernachlässige Terme $O(m^5)$

$m \neq 0$

$$\rightarrow b(T)m + c(T)m^3 = 0 \quad | :m$$

$$c(T)m^2 = -b_0(T - T_c)$$

$$c(T) \approx c > 0 \quad \Rightarrow m = \pm \sqrt{\frac{b_0}{c}} \sqrt{T_c - T}$$
$$= \pm m_0$$

Es ergibt sich also Meanfield-Verhalten!

$$m_0 = \pm (T_c - T)^{\frac{1}{2}}$$

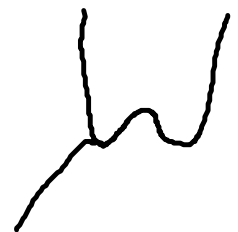
Meanfield
Exponent

Damit die Lösungen $\pm m_0$ für $T < T_c$

tatsächlich Minima darstellen, muß gelten.

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial m^2} \right|_{\pm m_0} = b(T) + 3c m_0^2 + 5d m_0^4 \geq 0$$

erfüllt, da $c > 0$
 $d > 0$



Generell: Die Terme mit den höchsten Potenzen des φ
müssen immer positiv sein
(mindestens der letzte!)

→ Stabilisierung des Minimums!

$$b) \quad F(m, T) = \frac{1}{2} b(T) m^2 + \frac{1}{4} c(T) m^4 + \frac{1}{6} d(T) m^6$$

mit

$$b(T) = b_0 (T - T_c^0)$$

$$c(T) < 0$$

$$d(T) > 0$$

$\forall T !$

} führt auf einen
Phasenübergang
1. Ordnung!

Extremumsbedingung:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial m} \right|_T = b(T) m + c(T) m^3 + d(T) m^5 = 0 \quad (*)$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial m^2} \right|_T = b(T) + 3c(T) m^2 + 5d(T) m^4$$

aus (*) sieht man:

- $m = 0$ ist immer Lösung

- Weitere Lösungen: ($m \neq 0$)

$$b(T) + cm^2 + dm^4 = 0$$

nach m auflösen:

$$m^2 = m_0^2 = -\frac{c}{2d} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4bd}{4d^2}}$$

Man kann zeigen:

$$m_0^2 = -\frac{c}{2d} - \sqrt{\dots}$$

entspricht immer
einem Maximum von F
und wird daher nicht
weiter betrachtet!

$$m_0^2 = -\frac{c}{2d} + \sqrt{\dots}$$

(gerade)
kann einem Minimum entsprechen.

Die Lösung existiert falls

$$c^2 - 4b(T)d > 0$$

$$\text{benutze } b = b_0(T - T_c^0)$$

$$\Rightarrow c^2 - 4b_0(T - T_c)d > 0$$

$$\Leftrightarrow T \leq T_1$$

$$\text{mit } T_1 = T_c^0 + \frac{c^2}{4b_0d}$$

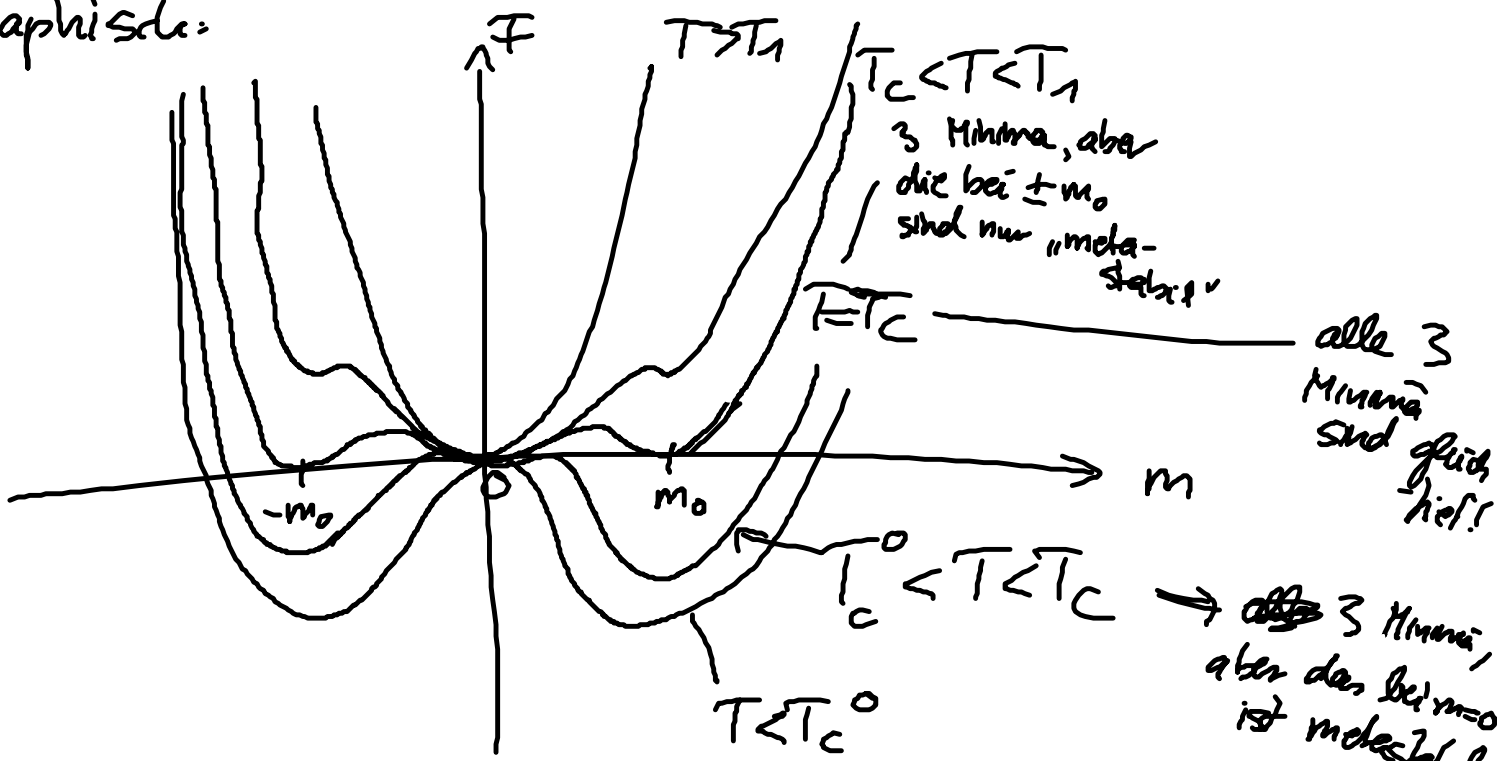
beachte: T_1 ist noch nicht die
 eigentliche Übergangstemperatur (T_c)
 sie bestimmt lediglich die
 Existenz des Minimums m_0^2

Sie ergibt sich aus der Bedingung

$$F(m_0=0) \Big|_{T_c} \stackrel{!}{=} F(m_0 \neq 0) \Big|_{T_c}$$

es ergibt sich: $T_c = T_c^0 + \frac{3c^2}{16 \text{ dB}_0}$
~~weist~~ $\Rightarrow T_c^0 < T_c < T_1$

graphische:

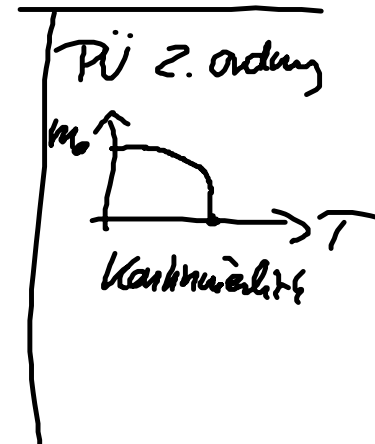
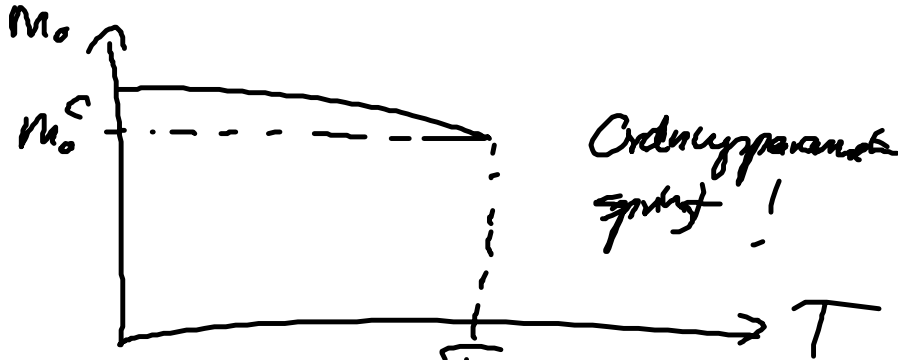


Temperaturverlauf des Ordnungsparameters bei Phasenübergang 1. Ordnung.

$$T > T_c \Leftrightarrow m_0 = 0$$

$$T < T_c \Leftrightarrow m_0 \neq 0$$

$$m_0^2 = -\frac{c}{2d} + \sqrt{\frac{c^2 - 4b_0(F-T_c)d}{4d^2}}$$



$m_0^0 > m_0(T=T_c)$

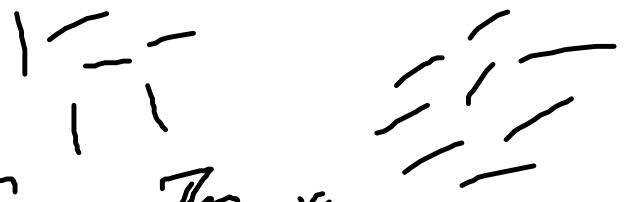
Beispiele:

Ordnung von Dipolmoment

- paraelektrische - ferroelektrischer Übergang in Kristallen (BaTiO3)

- Flüssigkristalle, Phasenübergang isotrop - nematisch

Landau-Theorie
heißt in diesem
Kontext häufig, "Maier-Saenger-Theorie"



IV, Ginzburg-Landau-Theorie

⇒ Verallgemeinerung der gewöhnl.
Landau-Theorie für Systeme mit
ortsabhängigen Ordnungsparametern

(z.B. lokale Magnetisierung $m(\underline{r})$)

$$F = \int d\underline{r} f(\underline{r})$$

↑ Free-Energie-Dichte

$$\text{mit } f(\underline{r}) = a(T) + \frac{b(T)}{2} m^2(\underline{r}) + \frac{c(T)}{4} m^4(\underline{r}) \\ - m(\underline{r}) h(\underline{r}) + \frac{g}{2} (\nabla m(\underline{r}))^2$$