IV. Landau- und Ginzburg-Landau-Theorie

(Landau 1936)

Grundidee:

In der Nähe von Phasenübergängen (2. oder 1. Ordnung) sind die Ordnungsparameter klein

→ Freie Energie kann in Potenzen des Ordnungsparameters entwickelt werden!

(und zwar so, daß die Symmetrien des Systems, z.B. Invarianz bei Vorzeichenwechsel oder Drehung des Ordnungsparameters gewährleistet ist!)

Beispiele für Landau-Entwicklungen (die wir bereits kennengelernt haben)

- Ising-Modell (unendliche Langreichweitig)

$$\frac{\beta F}{N} = \frac{\beta J_0}{2} m^2 - \ln 2\cosh(\beta J_0 m)$$

Landau-Entwicklung ($T \lessgtr T_c$)

$$\frac{\beta \tilde{F}}{N} \approx \frac{1}{2} m^2 (\beta J - \beta^2 J^2) + \frac{1}{8} \beta^3 J^4 m^4 - k_B T \ln 2$$

– Van-der-Waals Fluid

$$p = \frac{k_B T}{v-b} - \frac{a}{v^2} \qquad \text{vdW-Zustandsgleichung}$$

kleine Abweichung vom krit. Punkt: $\Delta\hat{p} = 4\Delta\hat{T} - 6\Delta\hat{T}\Delta\hat{v} - \frac{3}{2}\Delta\hat{v}^3$

$$\Delta\hat{T} = \frac{T - T_c}{T_c}$$

IV.1. Landau-Entwicklung für räumlich homogene Systeme

betrachte hier System mit

$$F(m,T) = F(-m,T)$$

↑ skalarer OP

F ist invariant gegenüber Vorzeichenwechsel von m!

Allgemeiner Ansatz für Landau-Entwicklung:

$$F(m,T) = a(T) + \frac{1}{2} b(T) m^2 + \frac{1}{4} c(T) m^4 + \frac{1}{6} d(T) m^6 + \ldots\ldots$$

beachte:

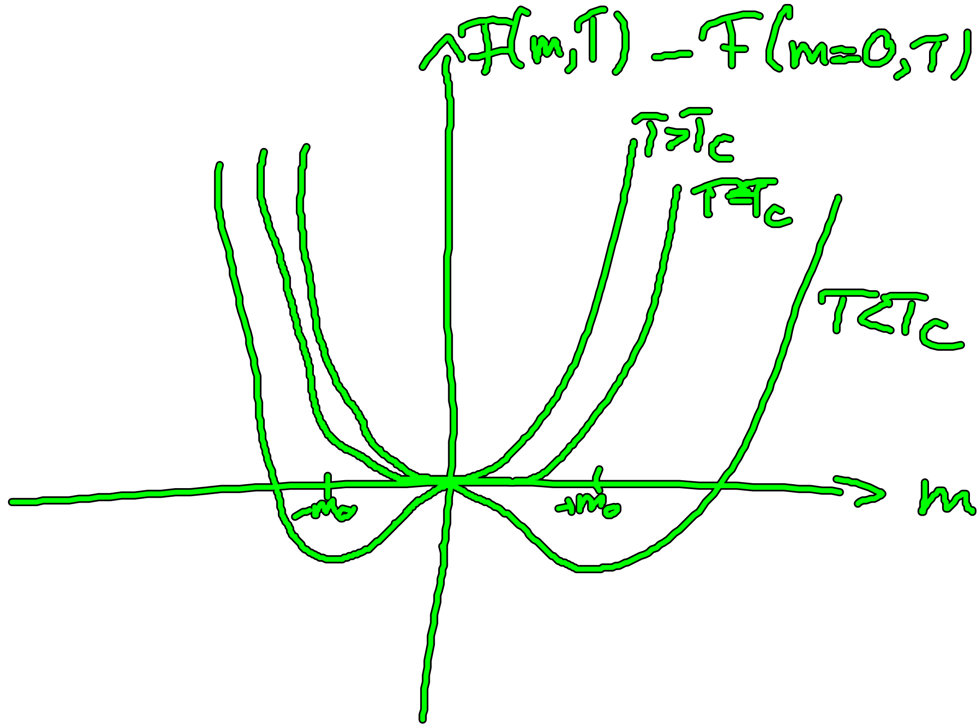
Das konkrete mikroskopische Modell ist hier nicht mehr relevant

⟶ „mesoskopische" Beschreibungsebene

aber: mikroskop. Modell bestimmt die Koeffizienten
$a(T)$, $b(T)$, $c(T)$, $d(T)$

Folgerungen aus dem allgemeinen Ansatz?

a) $b(T) = b_0 (T - T_c)$ mit $b_0 > 0$
$c(T) > 0$, $d(T) > 0$ und $c(T) \approx c$, $d(T) \approx d$



Phasenübergang 2. Ordnung!

generell: Minimum bestimmt durch $\left.\frac{\partial F}{\partial m}\right|_T \overset{!}{=} 0$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} b(T)m + c(T)m^3 + d(T)m^5 = 0$$

$T > T_c$: $m=0$ ist Lösung von (*)
und $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial m^2}\right|_{m=0} = b(T) = b_0(T-T_c) > 0$

$T \lesssim T_C$. Betrachte Situation dicht unterhalb T_C

$\longrightarrow$ m klein

$\longrightarrow$ vernachlässige Terme $\mathcal{O}(m^5)$ in (*)

$$\longrightarrow \quad b(T)\, m + c(T)\, m^3 = 0 \qquad \Big| :m$$

$$c(T)\, m^2 = -b_0 (T - T_C)$$

$$\Rightarrow \quad m = \pm \sqrt{\frac{b_0}{c}} \sqrt{T_C - T}$$

$c(T) \approx c > 0$

$$= \pm m_0$$

Meanfield Exponent

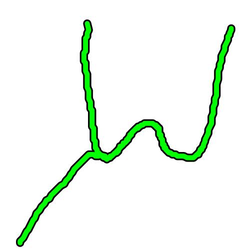
Es ergibt sich also Meanfield-Verhalten!

$$m_0 \propto (T_C - T)^{\frac{1}{2}}$$

Damit die Lösungen $\pm m_0$ für $T < T_C$ tatsächlich Minima darstellen, muss gelten:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial m^2}\bigg|_{\pm m_0} = b(T) + 3c\, m_0^2 + 5 d\, m_0^4 \geq 0$$

erfüllt, da $c > 0$, $d > 0$



Generell: Die Terme mit den höchsten Potenzen des OP müssen immer positiv sein (mindestens der letzte!)

$\longrightarrow$ Stabilisierung des Minimums!

b) $F(m,T) = \frac{1}{2} b(T) m^2 + \frac{1}{4} c(T) m^4 + \frac{1}{6} d(T) m^6$

mit

$$\left.\begin{array}{l} b(T) = b_0 (T - T_c^0) \\ \left.\begin{array}{l} c(T) < 0 \\ d(T) > 0 \end{array}\right\} \forall\, T\ ! \end{array}\right\}$$

führt auf einen Phasenübergang 1. Ordnung!

Extremumsbedingung:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial m}\right|_T = b(T) m + c(T) m^3 + d(T) m^5 = 0 \quad (*)$$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial m^2}\right|_T = b(T) + 3 c(T) m^2 + 5 d(T) m^4$$

aus (*) sieht man:

- $m = 0$ ist immer Lösung
- Weitere Lösungen: $(m \neq 0)$

$$b(T) + c m^2 + d m^4 = 0$$

nach m auflösen:

$$m^2 = m_0^2 = -\frac{c}{2d} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 4bd}{4d^2}}$$

Man kann zeigen:

$$m_0^2 = -\frac{c}{2d} - \sqrt{\;\cdots\;}$$

entspricht immer einem Maximum von F und wird daher nicht weiter betrachtet!

$$m_0^2 = -\frac{c}{2d} + \sqrt{\quad}$$

kann (genau!) einem Minimum entsprechen.

Die Lösung existiert falls

$$c^2 - 4b(T)d > 0$$

benutze $b = b_0(T - T_c^0)$

$$\Leftrightarrow c^2 - 4b_0(T - T_c)d > 0$$

$$\Leftrightarrow T \le T_1$$

mit $T_1 = T_c^0 + \underline{\dfrac{c^2}{4b_0 d}}$

>0

beachte: T_1 ist noch nicht die eigentliche Übergangstemperatur (T_c), sie bestimmt lediglich die Existenz des Minimums m_0^2

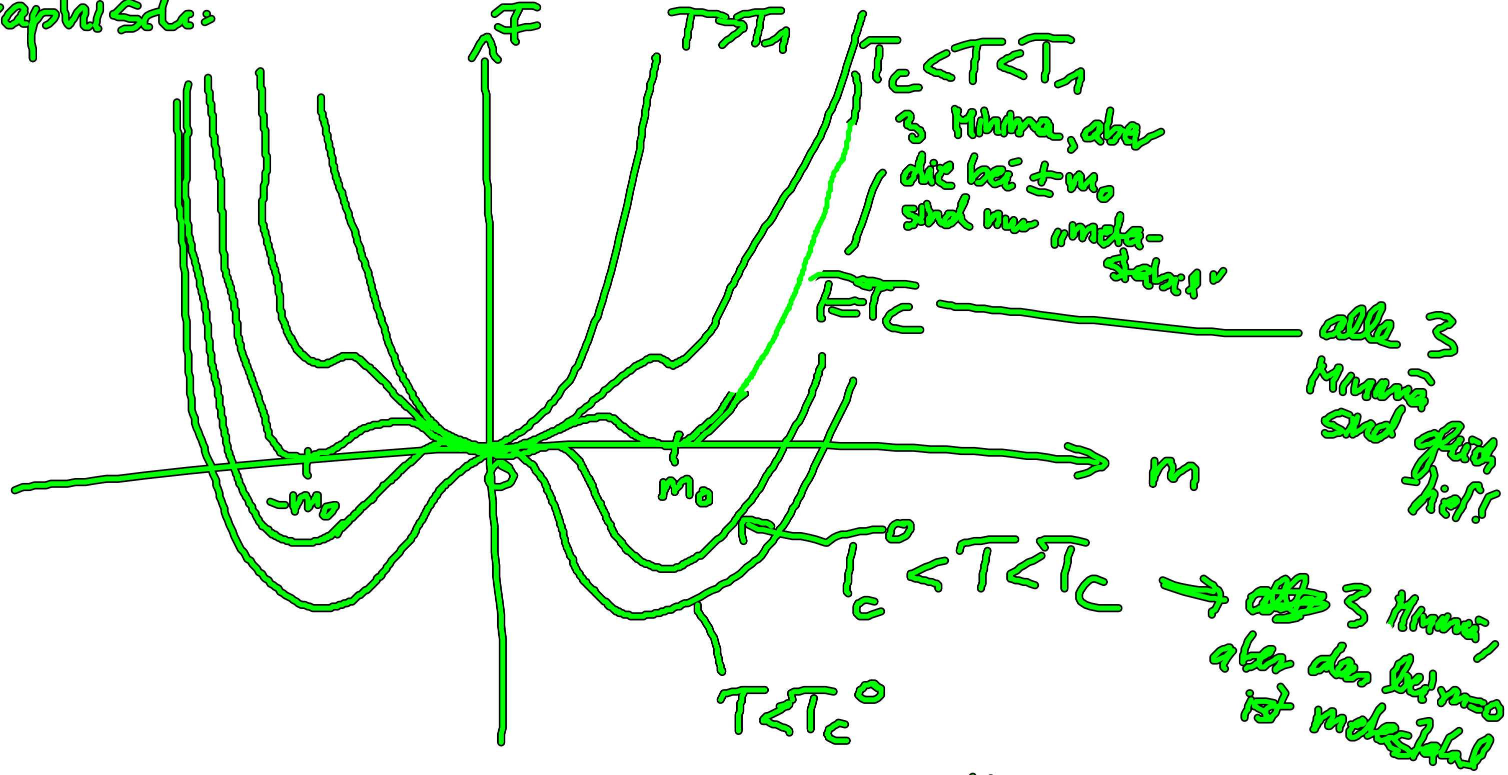
Sie ergibt sich aus der Bedingung

$$F(m_0=0)\Big|_{T_c} \overset{!}{=} F(m_0\neq 0)\Big|_{T_c}$$

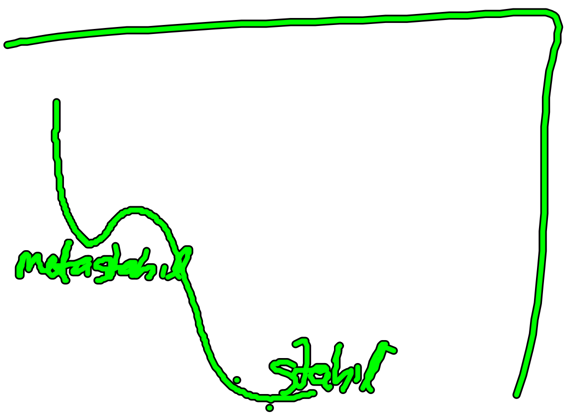
es ergibt sich: $T_c = T_c^0 + \underbrace{\frac{3c^2}{16 d b_0}}_{>0}$

$\Rightarrow T_c^0 < T_c < T_1$

graphisch:



Es existieren nur noch die (stabilen) Minima bei $\pm m_0$!

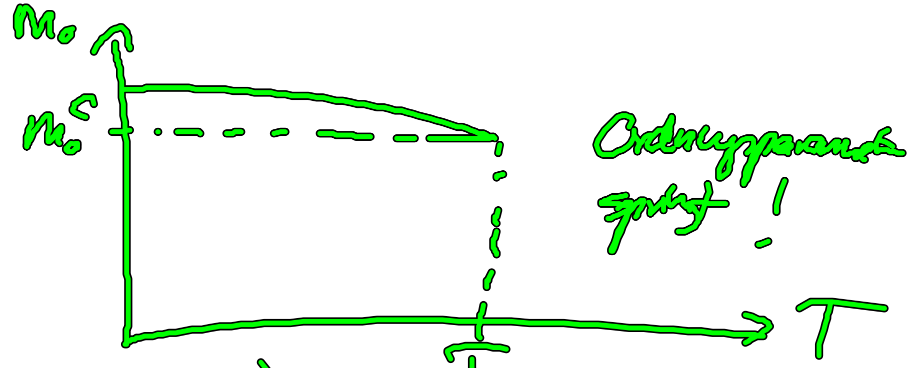


Temperaturverlauf des Ordnungsparameters bei Phasenübergang 1. Ordnung:

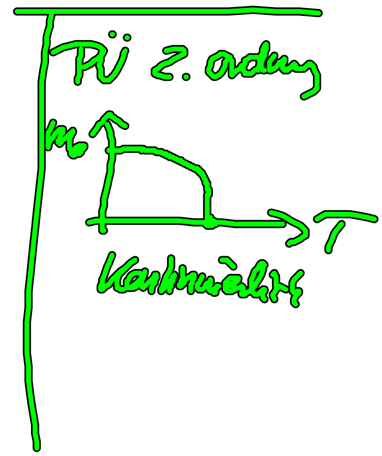
$T > T_c$: $m_0 = 0$

$T < T_c$: $m_0 \neq 0$

$$m_0^2 = -\frac{c}{2d} + \sqrt{\frac{c^2 - 4b_0(T-T_c^0)d}{4d^2}}$$



$m_0^c = m_0(T = T_c)$

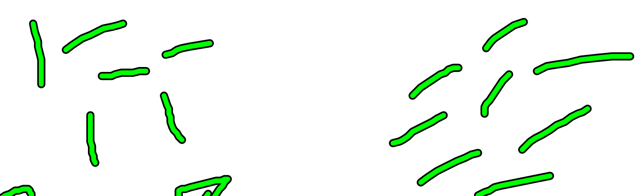


Beispiele:

- paraelektrische – ferroelektrische Übergang in Kristallen ($BaTiO_3$)

  Ordnung von Dipolmoment

- Flüssigkristalle, Phasenübergang isotrop — nematisch



Landau-Theorie heißt in diesem Kontext häufig „Maier-Saupe-Theorie“

IV. Ginzburg-Landau-Theorie

→ Verallgemeinerung der gewöhnl. Landau-Theorie für Systeme mit ortsabhängigem Ordnungsparameter

(z.B. lokale Magnetisierung $m(\underline{r})$)

$$F = \int d\underline{r}\; f(\underline{r})$$

← Freie-Energie-Dichte

mit
$$f(\underline{r}) = a(\underline{r}) + \frac{b(T)}{2} m^2(\underline{r}) + \frac{c(T)}{4} m^4(\underline{r}) - m(\underline{r})\,h(\underline{r}) + \frac{g}{2}\left(\nabla m(\underline{r})\right)^2$$