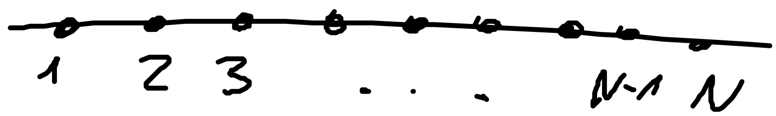
Eindimensionales Ising-Modell:

Exakte Lösung

Ising 1925

Betrachte 1-dim. Gitter $\hat{=}$ Kette mit N Plätzen



$$H = -J \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} - h \sum_{i=1}^{N} s_i$$

$$s_{N+1} = s_1$$ d.h. „periodische Randbed."

$\Longleftrightarrow$ geschlossene Spinkette!

Vorteil der geschlossenen Kette gegenüber der sog. offenen Spinkette

$\longrightarrow$ Translationsinvarianz

$\Longrightarrow$ Jeder Platz in der geschlossenen Kette ist gleichberechtigt

Wir können gleich annehmen

$$\langle s_1 \rangle = \langle s_2 \rangle \ldots = \langle s_N \rangle = \langle s \rangle = m$$

Magnetisierung pro Gitterplatz!

Kanonische Zustandssumme

$$Z_N = \sum_{\{s\}} e^{\beta J \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} + \beta h \sum_{i=1}^{N} s_i}$$

mit $\sum_{\{s\}} \ldots = \sum_{s_1 = \pm 1} \sum_{s_2 = \pm 1} \ldots \sum_{s_N = \pm 1} \ldots$

$$= \sum_{\{s\}} e^{\beta J s_1 s_2 + \beta h s_1 + \beta J s_2 s_3 + \beta h s_2 + \ldots \ldots}$$

führe ein:

$$\tilde{V}(s_\alpha, s_\beta) = e^{\beta J s_\alpha s_\beta + \frac{\beta h}{2}(s_\alpha + s_\beta)}$$

$\alpha, \beta = 1, \ldots, N$

Dann kann man schreiben:

$$Z_N = \sum_{\{s\}} \tilde{V}(s_1, s_2)\, \tilde{V}(s_2, s_3) \ldots$$

$$\ldots \tilde{V}(s_{N-1}, s_N)\, \tilde{V}(s_N, s_1)$$

~~betrachte~~ beachte Symmetrie. $\hat{V}(s_\alpha, s_\beta) = \hat{V}(s_\beta, s_\alpha)$

außerdem: $s_\alpha = \pm 1$, $s_\beta = \pm 1$

$\rightarrow$ Die Funktion $\hat{V}$ kann insgesamt 4 Werte annehmen!

Führe ein

$$\underline{\underline{V}} = \begin{pmatrix} \hat{V}(1,1) & \hat{V}(1,-1) \\ \hat{V}(-1,1) & \hat{V}(-1,-1) \end{pmatrix}$$ 2x2 Matrix

einsetzen der Def. von $\hat{V}$

$$\rightarrow \quad \underline{\underline{V}} = \begin{pmatrix} e^{\beta J + h} & e^{-\beta J} \\ e^{-\beta J} & e^{\beta J - h} \end{pmatrix}$$

„Transfer-Matrix"

Damit kann man schreiben

$$Z_N = \sum_{\{s\}} \hat{V}(s_1, s_2) \ldots \hat{V}(s_N, s_1)$$

$$= \sum_{s_1=\pm 1} \Big(\underbrace{\sum_{s_2=\pm 1} \ldots \sum_{s_N=\pm 1} \hat{V}(s_1, s_2) \ldots \hat{V}(s_N, s_1)}_{\underline{\underline{V}}^N} \Big)$$

sehr große 2x2 Matrix

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Spur}}}{\mathrm{Tr}}\ \underline{\underline{V}}^N$$

Explizit für $N=2$

$$Z_N = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \hat{V}(s_1, s_2) \hat{V}(s_2, s_1)$$

$$= e^{\beta J + h\beta} \cdot e^{\beta J + h\beta} \qquad s_1 = s_2 = 1$$

$$+ e^{\beta J - \beta h}\, e^{\beta J - \beta h} \qquad s_1 = s_2 = -1$$

$$+ e^{-\beta J + 0}\, e^{-\beta J + 0} \qquad s_1 = 1,\ s_2 = -1$$

$$+ e^{-\beta J + 0}\, e^{-\beta J + 0} \qquad s_1 = -1,\ s_2 = 1$$

$$= \left(e^{\beta J + \beta h}\right)^2 + \left(e^{\beta J - \beta h}\right)^2 + \left(e^{-\beta J}\right)^2 + \left(e^{-\beta J}\right)^2$$

$*$

anderseits.

$$\underline{\underline{V}}^2 = \begin{pmatrix} \left(e^{\beta J+\beta h}\right)^2 + \left(e^{-\beta J}\right)^2 & e^{\beta J+\beta h}\, e^{-\beta J} + e^{\beta J-\beta h}\, e^{-\beta J} \\ \text{symmetr.} & \left(e^{-\beta J}\right)^2 + \left(e^{\beta J-\beta h}\right)^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Tr}\, \underline{\underline{V}}^2 = \left(e^{\beta J+\beta h}\right)^2 + \left(e^{\beta J-\beta h}\right)^2 + 2\left(e^{-\beta J}\right)^2$$

also gilt ~~tatsächlich~~. !

$$Z_N = \mathrm{Tr}\, \underline{\underline{V}}^N$$

~~Freie~~ Daraus Freie Energie: $F = -k_B T \ln Z_N$
$= -k_B T \ln \mathrm{Tr}\, \underline{\underline{V}}^N$

Zur Auswertung von F diagonalisieren wir die Matrix $\underline{\underline{V}}$

$$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \underline{\underline{A}}^{-1}$$

λ_1, λ_2 Eigenwerte
$\underline{x}_1, \underline{x}_2$ Eigenvektoren

mit $\underline{\underline{A}}\, \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{1}}$

und $\underline{\underline{V}}\, \underline{x}_1 = \lambda_1 \underline{x}_1$

$\underline{\underline{V}}\, \underline{x}_2 = \lambda_2 \underline{x}_2$

benutze dabei $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{1}}$

Damit

$$Z_N = \mathrm{Tr}\, \underline{\underline{V}}^N = \mathrm{Tr}\, \underline{\underline{A}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^N \underline{\underline{A}}^{-1}$$

Zykl. Invarianz der Spur:

$$Z_N = \mathrm{Tr}\, \underbrace{\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}}}_{\underline{\underline{1}}} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^N$$

$$= \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^N = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} \lambda_1^N & 0 \\ 0 & \lambda_2^N \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Z_N = \lambda_1^N + \lambda_2^N}$$

$$\lambda_{1,2} = e^{\beta J} \cosh(\beta h) \pm \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \beta h + e^{-2\beta J}}$$

betrachte speziell $h \to 0$ $\qquad \lambda_{1,2}(h \to 0) = e^{\beta J} \pm e^{-\beta J}$

$$F = -k_B T \ln(\lambda_1^N + \lambda_2^N)$$

$$= -k_B T \ln\left(\lambda_1^N \cdot \left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N\right)\right)$$

$$= -k_B T \ln \lambda_1^N - k_B T \ln\left(1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N\right)$$

Es gilt immer: $\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^N = 0$$

Für $N \to \infty$ haben wir also:

$$\frac{F}{N} = f = -k_B T \ln \lambda_1$$

größte Eigenwert der Transfer-Matrix

$$= -k_B T \ln \left[e^{\beta J} \cosh(\beta h) + \sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2 \beta h + e^{-2\beta J}} \right]$$

$$= f(h, T)$$

Daraus die Magnetisierung

$$m = \langle s \rangle$$

$$\underset{\text{Translationsinvarianz}}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \langle s_i \rangle$$

$$= \frac{1}{N} \frac{1}{Z_N} \underbrace{\sum_{\{s\}} e^{-\beta H} \left(\sum_{i=1}^{N} s_i \right)}_{\beta^{-1} \frac{\partial}{\partial h} \sum_{\{s\}} e^{-\beta H}} \qquad \left(H = -J \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} - h \sum_{i=1}^{N} s_i \right.$$

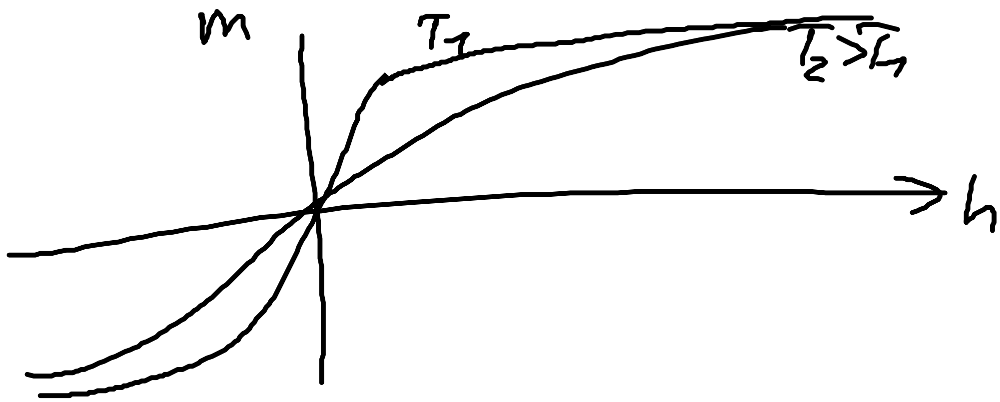
$$= \frac{1}{N} k_B T \frac{\partial}{\partial h} \ln Z_N = -\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial h} F(h,T)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial h} f(h,T)$$

Aus Ableitung von $f(h,T)$ nach h ergibt sich

$$m = m(h,T)$$

$$= \frac{e^{\beta J} \sinh(\beta h)}{\sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}}$$



betrachte $h \to 0$ (endliche Temperatur $T > 0$)

$$\sinh(\beta h) \approx \beta h \to 0 \quad \text{für } h \to 0$$

$$\Rightarrow m(h \to 0, T) = 0 \quad \text{für alle } T > 0 \text{ !}$$

d.h. Es gibt keine spontane Magnetisierung ($m \neq 0$ für $h \to 0$) bei $T > 0$

— im Unterschied zur Vorhersage der Mean-field-Theorie!

andererseits

betrachte ~~Mag~~ Magnetisierung im Feld ($h>0$) für kleine Temperaturen

$$\left(\text{Ausgangspunkt: } \quad m(h,T) = \frac{e^{\beta J} \sinh(\beta h)}{\sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h) + e^{-2\beta J}}} \right)$$

$T \to 0 \iff \beta J \to \infty$

$$\to m(h, T \to 0) \approx \frac{e^{\beta J} \sinh(\beta h)}{\sqrt{e^{2\beta J} \sinh^2(\beta h)}} = 1$$

Für $T \to 0$, $h > 0$ ist die Magnetisierung endlich, und zwar unabhängig vom Feld

„auch ein noch so kleines Feld erzeugt eine Ordnung bei $T \to 0$!"

Sprechweise:

„Das 1-dim. Ising Modell hat einen Phasenübergang bei $T=0$" (und $h \to 0$)

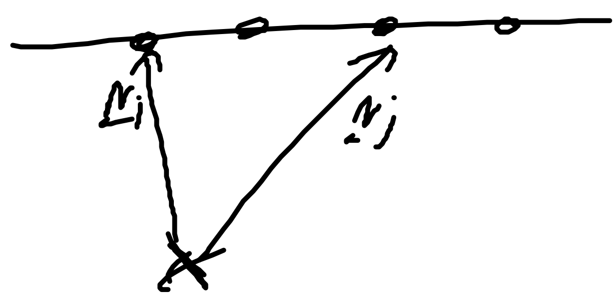
(d.h. im Grundzustand)

Diese Vorstellung kann man auch rechtfertigen über Betrachtung der Korrelationslänge

definiere: $$g_{ij} = \langle S_i S_j \rangle - \langle S_i \rangle \langle S_j \rangle$$

i, j Gitterplätze

$$r = |\underline{r}_i - \underline{r}_j|$$



man erwartet im translationsinvarianten System

$$g_{ij} = g(|\underline{r}_i - \underline{r}_j|) = g(r)$$

$$= e^{-r/\xi}$$ ← Korrelationslänge

exakter Ausdruck:

$$g_{ij} = g(r) = \sin^2 2\phi \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^r \qquad \text{mit } r = i-j$$

$$2\phi = \operatorname{arccot} e^{2\beta J} \sinh(\beta h)$$

λ_1, λ_2 Eigenwerte der Transfer-Matrix $\underline{\underline{V}}$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$$

betrachte $g(r)$ für große Abstände r

$$\Rightarrow \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^r \text{ wird klein}$$

$\Rightarrow$ Linearisiere den Sinus:

$$g(r) \sim 2\phi \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^r = 2\phi\, e^{\ln \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^r}$$

$$= 2\phi\, e^{r \ln \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

$$= 2\phi\, e^{-r \ln \lambda_1/\lambda_2}$$

$$\stackrel{!}{=} A\, e^{-r/\xi}$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi = \frac{1}{\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}}$$

betrachte gleich den feldfreien Fall
$h \to 0$

$$h \Rightarrow 0 \quad : \quad \lambda_{1,2} = e^{\beta J} \pm e^{-\beta J}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{e^{\beta J} + e^{-\beta J}}{e^{\beta J} - e^{-\beta J}}$$

$$= \frac{\cancel{e^{\beta J}}\left(1 + e^{-2\beta J}\right)}{\cancel{e^{\beta J}}\left(1 - e^{-2\beta J}\right)}$$

Jetzt:

$T \to 0$, d.h. $\beta J \to \infty$: $\lim_{T \to 0} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1$

$$\Rightarrow \quad \xi \to \infty$$

für $T \to 0$ bei $h = 0$