1.4 Galileisches Relativitätsprinzip

(der klass. Mechanik)

Newtonschen Axiome gelten in I S $\longrightarrow$

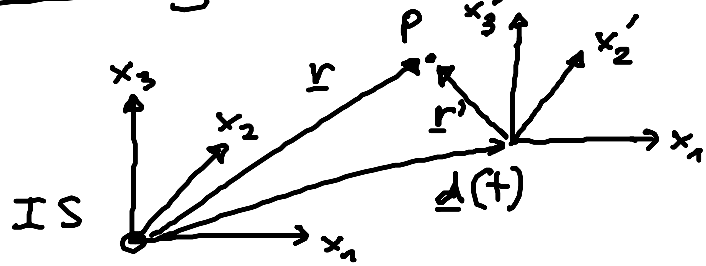
$$\boxed{\text{Alle I S bewegen sich gleichförmig zueinander. Sie sind alle gleichwertig.}} \qquad (1.26)$$

$$\longleftrightarrow$$

$$\boxed{\text{Die Newtonsche Axiome sind „forminvariant" unter Galileitransformationen. Diese vermitteln zwischen den verschiedenen I S}} \qquad (1.27)$$

- Beweis ?!

a) Herleitung spezieller Galileitransformation:



BS' = IS' ?

$$\underline{r}(t) = \underline{r}'(t) + \underline{d}(t) \qquad (1.28)$$

- Forderung: 1. Newtonsche Axiom gilt in allen IS

$$m\ddot{\underline{r}} = 0 \qquad (1.29)$$

$$\xrightarrow[(1.28)]{} \quad m\ddot{\underline{r}}'(t) = -m\ddot{\underline{d}}(t) \qquad (1.30)$$

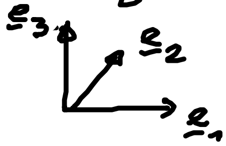
Bew. gesetz in BS'

$$BS' = IS' \,! \longrightarrow \ddot{\underline{d}}(t) = 0 \longrightarrow \underline{d} = \underline{v}\,t + \underline{a} \qquad (1.31)$$

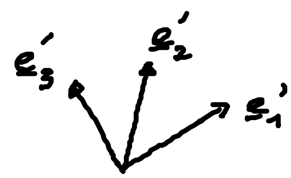
$$\longrightarrow \underline{r}' = \underline{r} - \underbrace{\underline{v}}_{\text{gleichf. Bewegung}} t - \underbrace{\underline{a}}_{\text{konstate Verschiebung}} \qquad (1.32)$$

b) Verallgemeinerung:

- Erinnerung:



$$\xrightarrow[\text{Drehmatrix}]{\text{Drehung der ONB}}$$



$\underline{\underline{D}} \in SO(3)$

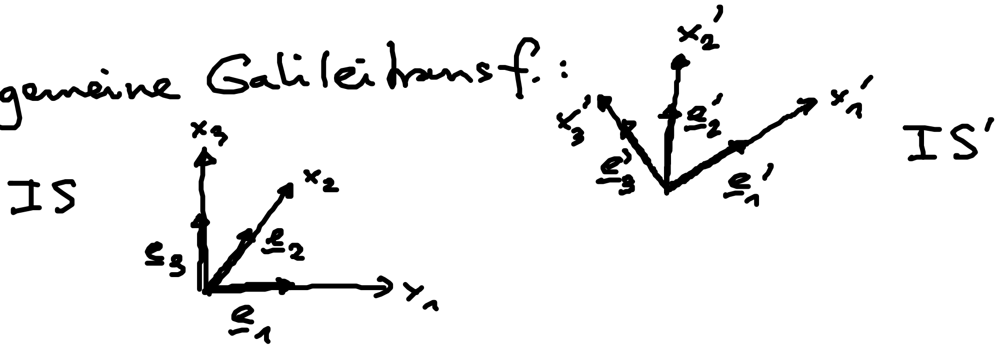
mit $D_{ij} = \underline{e}_i' \cdot \underline{e}_j \longrightarrow \underline{\underline{D}}\,\underline{\underline{D}}^t = \underline{\underline{1}} \Longleftrightarrow \underline{\underline{D}}^t = \underline{\underline{D}}^{-1}$

passiver Standpkt: $\underline{a} = a_j \underline{e}_j = a_i' \underline{e}_i' \longrightarrow$ $a_i' = D_{ij} a_j$

$$\underline{a}' = \underline{\underline{D}}\ \underline{a}$$

mit $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\underline{a}' = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix}$

- allgemeine Galileitransf.:



$$\boxed{\begin{aligned} \underline{r}' &= \underline{\underline{D}}\,(\underline{r} - \underline{v}t - \underline{a}) \\ t' &= t - t_0 \end{aligned}}$$

... in Komp. bzgl. ONB von IS'

(1.33)

$\underline{v}$ ... gleichförmige Bewegung („boost"), 3 Komp.
$\underline{a}$ ... konst. Verschiebung, 3 Komp.
t_0 ... " " , 1 Parameter
} in Komp. bzgl. ONB von IS

$\underline{\underline{D}}$ ... Drehung von IS' relativ zu IS, 3 Eulerschen Winkel

$\Longrightarrow$ $\boxed{\text{Galileigruppe mit 10 Parameter bzgl. Hintereinander-Ausführung}}$

$\longrightarrow$ Übungen
zeige Gruppenaxiome

c) 2. Newtonsches Axiom forminvariant unter (1.33)?

$$\underline{\underline{D}} \;\Big|\; m\, \ddot{\underline{r}}(t) = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \quad \text{in IS}$$

$\underline{\underline{D}}^{-1} \ddot{\underline{r}}'$ $\qquad$ $\underline{\underline{D}}^{-1} \underline{r}' + \underline{v}t + \underline{a}$ $\qquad$ $\underline{\underline{D}}^{-1} \dot{\underline{r}}' + \underline{v}$

$\longrightarrow \quad \underline{m\ddot{\underline{r}}'} = \underline{\underline{D}}\,\underline{F}(\ldots) = \underline{\underline{F}'(\underline{r}', \dot{\underline{r}}', t')}$ in IS' ✓

$\boxed{\text{Gesetze der klass. Physik müssen forminvariant unter (1.33) sein!}}$

d) Gültigkeit der Galilei-Invarianz.

- Maxwell-Gln. nicht forminvariant unter (1.33)!
  denn: Galilei: IS: c , IS': $c \pm v$

  (c: Lichtgeschw.)

  Maxwell: IS: c IS': c

- Einsteinsches Rel.-prinzip:

  $\boxed{\text{Alle IS sind gleichwertig. In jedem IS ist die Lichtgeschwindigkeit } c}$

$\longrightarrow$ Lorentz-Trafo für IS $\longrightarrow$ IS': Zeit nicht mehr absolut

↳ Maxwell-Gln invariant

↳ 2. Newtonsches Axiom modifiziert: $m \longrightarrow \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ („Ruhemasse")

2. Erhaltungssätze

- allg. Folgerungen aus den Newtonschen Axiomen
  - Begriffe einführen
  - Erhaltungssätze " , erleichtern Problemlösung

2.1 Impulserhaltung

- Impulssatz: $\int_{t_1}^{t_2} dt \Big/ \underline{F} = \frac{d\underline{p}}{dt} \longrightarrow \int_{t_1}^{t_2} \underline{F}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\underline{p}}{dt}\, dt$

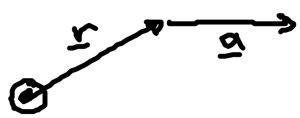
$$\longrightarrow \boxed{\underline{p}(t_2) - \underline{p}(t_1) = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \underline{F}(t)\, dt}_{\text{Kraftstoß}}} \quad (2.1)$$

$$\boxed{\underline{F} = 0 \longrightarrow \underline{p} = \text{konst.} \quad \ldots \ \underline{\text{Impulserhaltung}}} \quad (2.2)$$

... 1. Newtonsche Axiom

2.2 Drehimpulserhaltung

- Führe ein: Moment $\underline{M}$ einer Vektorgröße $\underline{a}$ bezogen auf einen Punkt im Raum:



$$\boxed{\underline{M} := \underline{r} \times \underline{a}} \quad (2.3)$$

Bsp:
$$\boxed{\begin{array}{ll} \underline{D} = \underline{r} \times \underline{F} & \ldots \text{ Kraftmoment, Drehmoment} \\ \underline{L} = \underline{r} \times \underline{p} & \ldots \text{ Impulsmoment, Drehimpuls} \end{array}} \quad (2.4)$$

($\underline{r} \times \underline{v}$ ... Moment der Geschw.
$\underline{r} \times \underline{a}$ ... " der Beschl.)

- Betrachte: $\underline{D} = \underline{r} \times \underline{F} \overset{\text{2. Newton}}{=} \underline{r} \times \frac{d\underline{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\underline{r} \times \underline{p}) - \underbrace{\dot{\underline{r}} \times \underline{p}}_{=0,\ \dot{\underline{r}} \parallel \underline{p} = m\dot{\underline{r}}}$

$\xrightarrow{(2.4)}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Drehimpulssatz:} & \frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{D} \quad (2.5) \\ \text{Integralform:} & \underline{L}(t_2) - \underline{L}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \underline{D}(t)\, dt \end{array}} \quad (2.6)$$

- $\boxed{\underline{D} = 0 \longrightarrow \underline{L} = \text{konst} \quad \ldots \ \text{Drehimpulserhaltung}}$ (2.7)

Anwendung: $\longrightarrow$ Keplerproblem [$\longrightarrow$ 2.3]
$\longrightarrow$ starrer Körper

2.3 Flächensatz

• Sei $\underline{D} = \underline{r} \times \underline{F} = \underline{0}$ $\longrightarrow$ $\underline{F} = 0$

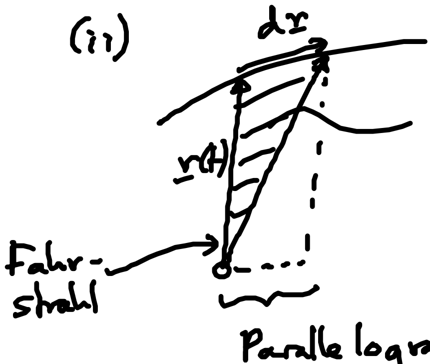
$\longrightarrow$ $\boxed{\underline{F} = f(\underline{r}, \underline{\dot{r}}, t)\, \underbrace{\underline{e}_r}_{\underline{e}_r = \frac{\underline{r}}{r}} \parallel \underline{r} \quad \ldots \text{Zentralkraftfeld}}$

• Sei $\underline{D} = 0 \longrightarrow \underline{L} = \text{konst.} = m(\underline{r} \times \underline{\dot{r}})$

$\longrightarrow \underline{r}, \underline{\dot{r}} \perp \underline{L}$

(i) $\boxed{\underline{D} = 0 \longrightarrow \text{ebene Bewegung} \perp L}$ (2.9)

(ii)



Fläche: $df = \frac{1}{2}|\underline{r} \times d\underline{r}|$

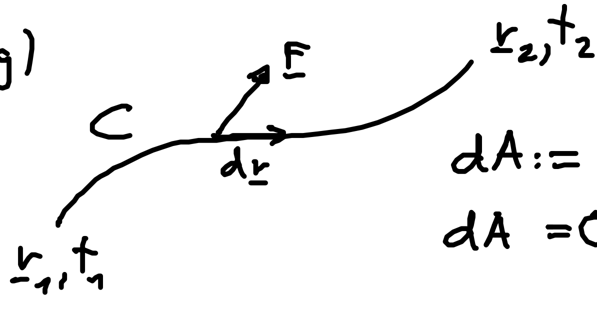
$$\frac{df}{dt} = \frac{\frac{1}{2}|\underline{r} \times d\underline{r}|}{dt} = \frac{1}{2}|\underline{r} \times \underline{v}| = \frac{1}{2m}|\underline{r} \times \underline{p}| = \frac{1}{2m}|\underline{L}| = \text{konst.}$$

$\longrightarrow$ Flächensatz: 2. Keplersches Gesetz

$\boxed{\underline{D} = 0 \longrightarrow \text{Die vom Fahrstrahl pro Zeiteinheit überstrichene Fläche ist konstant!}}$

2.4 Energieerhaltung

a) Arbeit: (Kraft × Weg)



$dA := \underline{F} \cdot d\underline{r}$ (2.12)

$dA = 0, \ \underline{F} \perp d\underline{r}$

• **Def:**

$$A_{12}(C) = \int_{\underline{r}_1, C}^{\underline{r}_2} dA = \int_{\underline{r}_1, C}^{\underline{r}_2} \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \cdot d\underline{r}$$

$$= \int_{t_1, C}^{t_2} \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) \cdot \dot{\underline{r}}(t)\, dt$$

... Arbeit, die Kraftfeld $\underline{F}$ am Massepkt verrichtet, wenn er sich von $\underline{r}_1$ nach $\underline{r}_2$ bewegt.

• Einheit: $[A_{12}] = \text{Joule} = \text{J} = \text{Nm}$