2.3 Flächensatz

- $\underline{D} = \underline{r} \times \underline{F} = 0$ $\nearrow \underline{F} = 0$ $\searrow \underline{F} \sim \underline{e}_r = \frac{\underline{r}}{r}$ ... Zentralkraftfeld

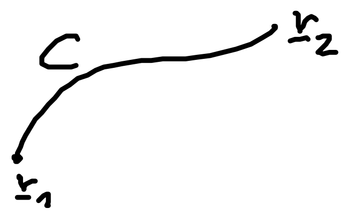
- $\underline{D} = 0 \longrightarrow \underline{L} = \text{konstant} = m(\underline{r} \times \underline{\dot{r}})$

  $\longrightarrow \underline{r}, \underline{\dot{r}} \perp \underline{L}$

  (i) $\longrightarrow$ ebene Bewegung

  (ii) ...

2.4. Energieerhaltung



- $dA := \underline{F} \cdot d\underline{r}$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} A_{12}(C) &= \int_{\underline{r}_1, C}^{\underline{r}_2} dA = \int_{\underline{r}_1, C}^{\underline{r}_2} \underline{F}(\underline{r}, \underline{\dot{r}}, t) \cdot d\underline{r} \\ &= \int_{t_1, C}^{t_2} \underline{F}(\ldots) \cdot \underline{\dot{r}}(t)\, dt \end{aligned}} \qquad (2.13)$$

- Einheit: $[A_{12}] = \text{Joule} = \text{J} = \text{Nm}$

- **Def:** Leistung = geleistete Arbeit pro Zeiteinheit (2.14)

$$N = \frac{dA}{dt} \underset{(2.13)}{=} \underline{F} \cdot \underline{\dot{r}}$$

b) Kinetische Energie & Kräfte

- 2. Newton-Gesetz $\cdot \underline{\dot{r}} \longrightarrow \quad m\,\underline{\ddot{r}}\cdot\underline{\dot{r}} = \underline{F}\cdot\underline{\dot{r}}$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{m\,\underline{\dot{r}}^2}{2}\right) = \underline{F}\cdot\underline{\dot{r}} \underset{(2.14)}{=} N} \qquad (2.15)$$

- Leistung ändert $\underline{\dot{r}}$!

<u>Def.</u> $\boxed{\text{kinetische Energie:} \quad T = \frac{m}{2}\,\underline{\dot{r}}^2} \qquad (2.16)$

- Integriere: $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} (2.15)\, dt \longrightarrow \boxed{T(t_2) - T(t_1) = A_{12}(C)} \qquad (2.17)$

… verrichtete Arbeit geht in kinet. Energie!

- Zerlege: $\boxed{\underline{F} = \underbrace{\underline{F}_{kons}}_{\text{konservative}} + \underbrace{\underline{F}_{diss}}_{\text{dissipative Kraft}}} \qquad (2.18)$

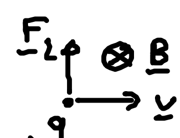
dissipative Kraft (Reibungs-) erzeugen Wärme $\longrightarrow$ mechan. Energie geht verloren

(Bsp: $\longrightarrow$ Kap. 3)

c) Konservative Kräfte

$\boxed{\text{ändern } \underline{\text{nicht}} \text{ die Gesamtenergie (mechanische) des Massepunktes}}$

- Spezialfall: Lorentz-Kraft $\quad \underline{F}_L = \underbrace{\frac{q}{c}}_{\text{cgs. System}} (\underline{v} \times \underline{B})$



$$\underline{F}_L \perp \underline{v} \xrightarrow[(2.15)]{} N = 0 \longrightarrow T = \text{konst.}! \qquad (2.19)$$

- <u>Konservative Kraft</u> im <u>engeren</u> Sinne:

<u>Def:</u> $\underline{F}_{kons}$ besitzt ein Potential $U(\underline{r})$, so daß gilt:

$$\boxed{\underline{F}_{kons} = -\,\mathrm{grad}\, U(\underline{r})} \qquad (2.20)$$

(<u>keine</u> Abh. von $\underline{\dot{r}}, t$)

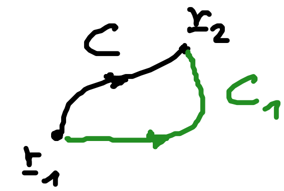
[Erinnerung: $dU = \mathrm{grad}\, U(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \underline{\nabla} U(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$

kartesische Koord.: $\mathrm{grad}\, U = \underline{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} e_x + \frac{\partial U}{\partial y} e_y + \frac{\partial U}{\partial z} e_z$

$\underline{\nabla} U \perp$ Äquipotentiallinien: $U(\underline{r}) = $ konst.]

Bemerkung:

(i) verrichtete Arbeit von $\underline{F}_{kons}$:



$$A_{12}(C) \underset{(2.13)}{=} \int \underline{F}_{kons} \cdot d\underline{r}$$

$$\underset{(2.20)}{=} - \int \mathrm{grad}\, U \cdot d\underline{r} = - \int_C dU$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{A_{12}(C) = - \left[U(\underline{r}_2) - U(\underline{r}_1) \right]} \qquad (2.21)$$

$\longrightarrow$ Arbeit ist unabhängig vom Weg in konservativen Kraftfeldern!

$\longrightarrow$ geschlossene Wege: $\circlearrowright$ = "$C - C_1$"

$$\boxed{A(\circlearrowright) = 0} \qquad (2.22)$$

(ii) Existenz eines Potentials (vgl. MMP Kap. 6.6)

$$\boxed{\underbrace{\mathrm{rot}\, \underline{F} = 0}_{\text{im einfach zusammenhängenden Gebiet}} \;\overset{\text{„genau}}{\underset{\text{dann“}}{\Longleftrightarrow}}\; \underline{F} = -\mathrm{grad}\, U} \qquad (2.23)$$

[Erinnerung: $\text{rot}\,\underline{F} = \underline{\nabla} \times \underline{F}$

kartesische Koord. $(\underline{\nabla} \times \underline{F})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k$,

$i,j = x,y,z$]

Beweis: $(\longrightarrow)$ Satz von Stokes & weitere Überlegung

$(\longleftarrow)$ $[\underline{\nabla} \times \underline{F}]_i = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} U(\underline{r}) = 0$!

d) Energieerhaltung:

Verwende: $$\underline{F}_{kons} \cdot \dot{\underline{r}} = -\,\text{grad}\, U \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} = -\frac{d}{dt} U(\underline{r}) \qquad (2.24)$$

in (2.15) $\longrightarrow$ $$\boxed{\frac{d}{dt}\left[\frac{m\dot{\underline{r}}^2}{2} + U(\underline{r})\right] = \underline{F}_{diss} \cdot \dot{\underline{r}}} \qquad (2.25)$$

- nur konservative Kräfte ($\underline{F}_{diss} = \underline{0}$):

(2.25): $\frac{d}{dt}(\ldots) = 0$ $\longrightarrow$ $$\boxed{\frac{m\dot{\underline{r}}^2}{2} + U(\underline{r}) = E = \text{konst.}} \qquad (2.26)$$

... Energieerhaltungssatz

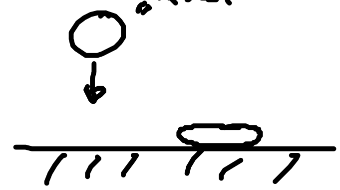
Def: $$\boxed{\begin{array}{ll} U(\underline{r}) & \text{... potentielle Energie} \\ E & \text{... Gesamtenergie} \\ & \quad\text{(mechanisch)} \end{array}} \qquad (2.27)$$

„konservativ“ ... Energie erhaltend

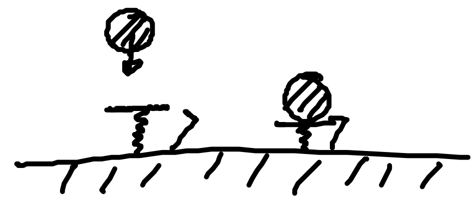
• $\underline{F}_{diss} \neq 0$:

mechan. Energie (T+U) $\longrightarrow$ Umwandlung in Wärmeenergie (Bsp. Reibung)
„Dissipation„Kraft"

Bsp:



$\longrightarrow$ Austausch mit Umgebung durch (zeitabhängige) Kräfte



Abgabe von $E = T + U$ an Feder!

• Schlußbemerkung:

$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$ ... Dgl. 2. Ordnung in t

$\downarrow$

Erhaltungssätze: $E(\underline{r}, \dot{\underline{r}})$, $\underline{p}$, $\underline{L}$ ... Dgl. 1. Ordnung in t

$\longrightarrow$ erste Integrale der Bewegung!

• Anwendung: Trifft Meteor die Erde? nur mit $E = \text{konst.}$, $\underline{L} = \text{konst.}$ lösbar!

$\longrightarrow$ Übungen

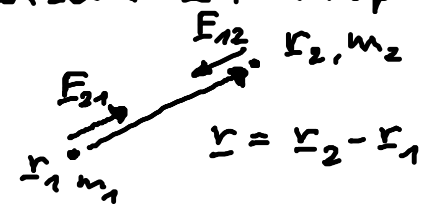
Wiederholung: komplexe Zahlen!

---

3. Katalog der Kräfte

3.1 Konservative Kräfte

a) Newtonsche Gravitationskraft: zwischen 2 Massepktn.



$$\boxed{\underline{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \underbrace{\frac{\underline{r}}{r}}_{\underline{e}_r}} \qquad (3.1)$$

$$\underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1$$

$$\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}$$

- Gravitationskonstante: $\gamma = 6{,}670 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$
- Fernwirkungsstandpkt.
- Anwendung: Keplerproblem

• $U(\underline{r})$? Trick: $\underline{\nabla} r = \underline{\nabla}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\underline{r}}{r} = \underline{e}_r$!

$$\underline{\nabla} U(r) = \frac{\partial U}{\partial r} \underline{\nabla} r = \frac{\partial U}{\partial r} \underline{e}_r \qquad (3.2)$$

$\underline{F}_{12} = -\mathrm{grad}\, U(r)$!

$$\longrightarrow \boxed{U(\underline{r}) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}} \qquad (3.3)$$

... weitreichende Wechselwirkung

$$U(\underline{r}) \sim \frac{1}{r^n}, \quad n = 1!$$

• Feld-/Nahwirkungsstandpkt.

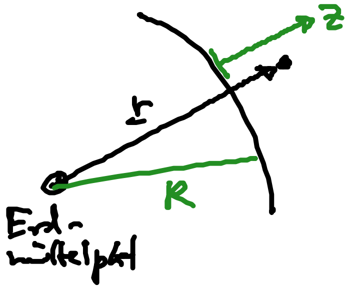
Gravitations|potential/feld, von m_1 erzeugt: $\varphi(\underline{r}) = -\gamma \frac{m}{r}$ (3.4)

pot. Energie von m_2 in $\varphi(\underline{r})$: $U(\underline{r}) = m_2 \varphi(\underline{r})$ (3.5)

$$\underline{F}_{12} = -m_2\, \mathrm{grad}\, \varphi(\underline{r}_2) \qquad (3.6)$$

ART: m_1 bewegen $\longrightarrow$ Gravitationswellen in $\varphi(\underline{r}, t)$
= Wellen in der Raumzeit

b) Schwer-/Gewichtskraft:



$|\underline{r}| = r = R + z$, $z \ll R$

$$\longrightarrow \frac{1}{r} = \frac{1}{R+z} = \frac{1}{R}\underbrace{\frac{1}{1+\frac{z}{R}}}_{\text{Marke: } \approx 1 - \frac{z}{R}} \approx \frac{1}{R} - \frac{z}{R^2} \quad (3.7)$$

$\frac{z}{R} \ll 1$ (Taylor)

Erdmasse M, Probemasse m

$\longrightarrow$ pot. Energie: [von m im Grav. feld der Erde]

$$\tilde{U}(z) = U(R+z) - U(R) \overset{(3.3)}{\underset{(3.7)}{=}} \gamma \frac{M}{R^2} m z$$

$\longrightarrow$ $\boxed{\tilde{U}(z) = m g z}$, Fallbeschleunigung: (3.8)

$$\boxed{g = \gamma \frac{M}{R^2} = 9{,}81 \frac{m}{s^2}}$$

Erde

$\longrightarrow$ Gewichtskraft von m: $\boxed{\underline{G} = -\operatorname{grad} \tilde{U} = -m g \underline{e}_z}$ (3.9)