4.2 Bewegung im konservativen Kraftfeld

• Newton: $m\ddot{x} = -U'(x)$ (4.2)

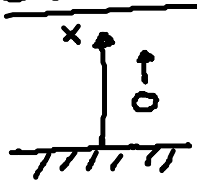
$\longrightarrow$ EES: $\frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E$ (4.3)

$$\xrightarrow{\dot{x}=\frac{dx}{dt}} \quad t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E-U(x))}} \qquad (4.4)$$

$$\longrightarrow \quad x = x(t-t_0, x_0, E) \qquad (4.5)$$

Integrationsvariablen: E, $x(t_0)$ [i.f. o.B.d.A.: $t_0=0$]

a) Sentrechter Wurf bei konstanter Gewichtskraft:



$$m\ddot{x} \underset{(3.9)}{=} -mg$$

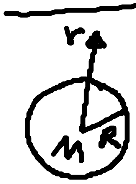
$$\longrightarrow \quad \dot{x}(t) = -gt + v_0 \qquad (4.7)$$

$$\longrightarrow \quad x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \qquad (4.8)$$

• Steighöhe h von $x_0=0$: Umkehrpkt.: $\dot{x}=0 \xrightarrow{(4.7)} t = \frac{v_0}{g}$

$$\xrightarrow{(4.8)} \boxed{h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}} \qquad (4.9)$$

b) Senkrechter Wurf im Gravitationspotential:



$$m\ddot{r} \underset{(3.1)}{=} -\gamma\frac{mM}{r^2} \underset{g=\gamma\frac{M}{R^2}}{=} -mg\frac{R^2}{r^2} \qquad (4.10)$$

1. Integral: $\frac{m}{2}\dot{r}^2 \underbrace{- mg\frac{R^2}{r}}_{U(r)\ldots} = E$ (4.11)

$U(r)\ldots$ pot. Energie im Grav.potential

2. Integral: ($t_0=0$)

$$t = \int_{R}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \underbrace{mg\frac{R^2}{r}}_{-U(r)}\right)}} \qquad (4.12)$$

R (an Erde bei $t=0$)

• parabolische / 2. kosmische Fluchtgeschwindigkeit v_0:

$$\boxed{E = 0 \;\hat{=}\; v(r \to \infty) = 0}$$

aus EES (4.11) mit $r = R$:

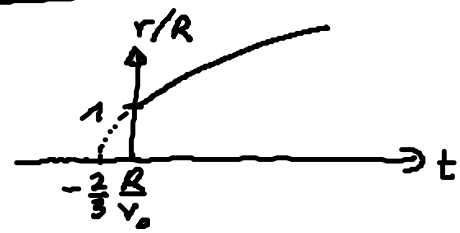
$$\boxed{v_0 = \dot{r}(0) \underset{E=0}{=} \sqrt{2gR}} \underset{\text{Erde}}{=} 11{,}2\,\frac{km}{s} \qquad (4.13)$$

$R = 6000\,km$

aus (4.12)

$$t \overset{(4.13)}{\underset{E=0}{=}} \int_R^{r(t)} \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{r}{R}}\,dr = \frac{2}{3}\frac{1}{v_0\sqrt{R}}\, r^{3/2}\Big|_R^{r(t)} = \frac{2}{3}\frac{1}{v_0\sqrt{R}}\left[r^{3/2}(t) - R^{3/2}\right]$$

$$\longrightarrow \boxed{r(t) = R\left[1 + \frac{3}{2}\frac{v_0}{R}t\right]^{2/3}} \qquad (4.14)$$



mit $\dot{r}(t) = \dfrac{v_0}{\left[1 + \frac{3}{2}\frac{v_0}{R}t\right]^{1/3}} \longrightarrow 0, \quad t \to \infty$

• a) aus b): $\frac{3}{2}\frac{v_0}{R}t \ll 1$: Taylorentw. von (4.14) mit (4.13)

$$\xrightarrow{}\;[(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x] \qquad \boxed{r(t) = \underbrace{R + v_0 t - \frac{g}{2}t^2}_{(4.8)} + \underbrace{\frac{1}{6}\frac{v_0^3}{R^2}t^3 + \ldots}_{\text{Korrektur}}} \qquad (4.15)$$

4.3 Bewegung im geschwindigkeitsabh. Kraftfeld

• Löse: $m\ddot{x} = F(\dot{x}) \xrightarrow[\dot{x} = v]{} m\dot{v} = F(v)$ ... Dgl. 1. Ordnung

– Trennung der Variablen: $\dot{v} = \frac{dv}{dt} \longrightarrow t = m\displaystyle\int_{v_0 = v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{F(v)}$

$\longrightarrow v(t)$

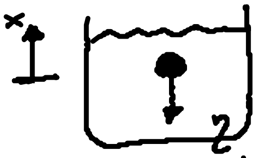
– 2. Integral: $x(t) = \displaystyle\int_0^t v(t')\,dt' + x_0$

x_0, v_0 … Integrationsvariablen

• in der Regel: $t \to \infty$: schleichende Bewegung: $m\dot{v} = F(v) = 0$

$\longrightarrow v_\infty$ … Grenzgeschw.

a) Freier Fall mit Stokesscher Reibung:



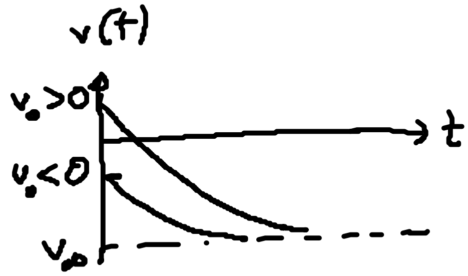
… Viskosität

• $m\dot{v} = -mg - \beta v$ (4.17) $\quad \beta = 6\pi\eta a$ … Kugel

• $F(v) = 0 \longrightarrow \boxed{v_\infty = -\frac{mg}{\beta}} < 0$ (4.18)

• $$t \underset{(4.16)}{=} -m \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{mg+\beta v} \underset{(4.18)}{=} -\frac{m}{\beta} \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{\underbrace{\frac{mg}{\beta}}_{-v_\infty} + v} = -\frac{m}{\beta} \ln \frac{-v_\infty + v(t)}{-v_\infty + v_0}$$

$$\longrightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln \frac{-v_\infty + v(t)}{-v_\infty + v_0} \Big| e^{\cdots} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} v(t) = v_\infty + (v_0 - v_\infty)\, e^{-t/\tau} \\ \tau = \frac{m}{\beta} \text{ … Relaxationszeit} \end{array}} \quad (4.19)$$



! $v(t) \to v_\infty$, $t \to \infty$

Bsp: $\eta(H_2O) = 0{,}001 \frac{kg}{ms}$

$$\left. \begin{array}{l} a = 10^{-6}\,m \\ \rho = 1 \frac{g}{cm^3} = 10^3 \frac{kg}{m^3} \end{array} \right\} \begin{array}{l} m = \rho \frac{4\pi}{3} a^3 \\ \approx 4 \cdot 10^{-15}\,kg \end{array}$$

$$\longrightarrow \tau = \frac{m}{6\pi\eta a} \approx 10^{-7}\,s\ !$$

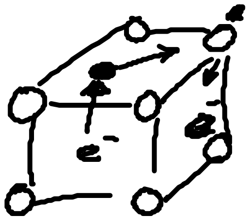
• Anwendung: mikroskop. Modell für Ohmsches Gesetz

$-mg \longrightarrow eE$ …. angelegtes Feld beschl. $e^- \underset{(4.18)}{\longrightarrow} \boxed{v_\infty = \frac{eE}{\beta}}$ (4.20)

elektr. Stromdichte: $j = \underbrace{n}_{\text{Ladungsträgerdichte}} e\, v_\infty := \sigma E$ … Ohmsches Gesetz

$$\overset{(4.20)}{\longrightarrow} \boxed{\sigma = \frac{ne^2}{\beta} \underset{(4.19)}{=} \frac{ne^2\tau}{m}} \quad (4.21) \text{ … spezif. Leitfähigkeit}$$

<u>Mechanismus für $\tau = \frac{m}{\beta}$</u>



Reibung β durch Stöße von e^- mit Phononen (Gitterschwingungen) & Verunreinigungen im Metall

$\longrightarrow$ τ … <u>mittleren stoßfreien Zeit</u>

b) Freier Fall mit Newtonscher Reibung (Luftwiderstand):

- Löse $\quad m\dot{v} = -mg + \gamma v^2 \quad \longrightarrow$ Übungen

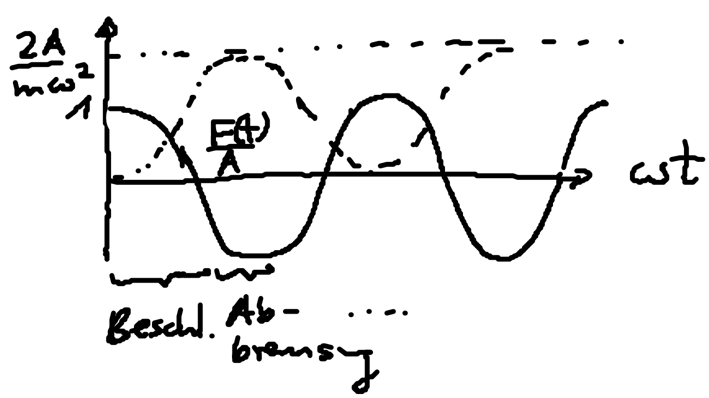
4.4. <u>Reine zeitabhängige Kraft</u>

- Löse: $\quad m\ddot{x} = F(t) \xrightarrow{\text{1. Integral}} \dot{x}(t) - v_0 = \frac{1}{m}\int_0^t F(t')\,dt' \quad (4.22)$

$$\xrightarrow{\text{2. Integral}} x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{m}\int_0^t dt' \int_0^{t'} dt''\, F(t'') \quad (4.23)$$

- <u>Bsp:</u> $\quad F(t) = A\cos\omega t$

$$\xrightarrow[\text{o.B.}]{} \quad x = \underbrace{x_0 + vt}_{\text{gleichf. Bewegung}} + \frac{A}{m\omega^2}(1 - \underbrace{\cos\omega t}_{\text{in Gegenphase zur erregenden Kraft}})$$



5. Eindimensionaler harmonischer Oszillator

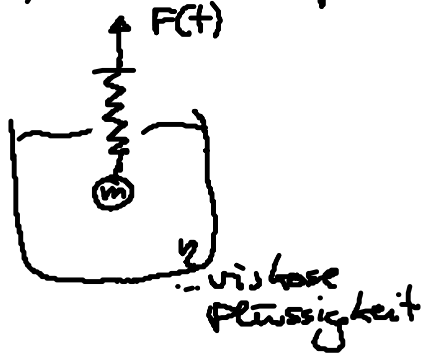
- volles Problem:

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{ges}(x,\dot{x},t) \\ \text{mit } F_{ges}(x,\dot{x},t) &= \underbrace{-fx}_{\substack{\text{harm./}\\\text{Feder-}\\\text{kraft}}} \; \underbrace{-\alpha\dot{x}}_{\substack{\text{Stokes-}\\\text{sche}\\\text{Reibung}}} + F(t) \end{aligned}} \quad (5.1)$$

- Realisierung:

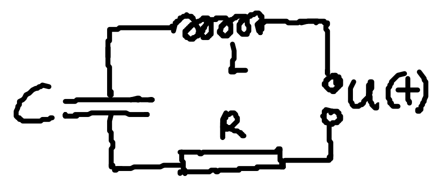
mechanisch

Maxwell-Körper



elektromagnetisch

Schwingkreis



$$\underbrace{L\ddot{Q}}_{\text{„Masse"}} + \underbrace{R\dot{Q}}_{\text{„Reibung"}} + \underbrace{\frac{1}{C}Q}_{\text{„Feder"}} = U(t), \quad \dot{Q}(t) = I(t)$$

- harm. Oszillator: – fundamentale Bedeutung in der Physik
  – eines der wenigen exakt lösbaren Probleme

- dient zur:
  Veranschaulichung von fundamentalen Konzepten

- **mathem. Details**: [MMP, Kap. 8]

(5.1): Lineare Dgl. 2. Ordnung in Zeit für $x(t)$
mit Inhomogenität $[F(t)]$

↳ Superpositionsprinzip → $x_{part}(t)$

↳ 2. Integrationskonst.

allg. Lsg.:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{a\,x_1(t) + b\,x_2(t)}_{\substack{x_{hom}(t)\\ \text{Lsg. von homog. Dgl.}\\ (\to F(t)=0)}} + x_{part}(t)} \quad (5.2)$$

wobei $x_1(t), x_2(t)$ linear unabh. sind