4.2 Bewegung im konservativen Kraftfeld

• Newton: $$m\ddot{x} = -U'(x) \quad (4.2)$$

$$\longrightarrow \text{EES}: \quad \frac{m}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E \quad (4.3)$$

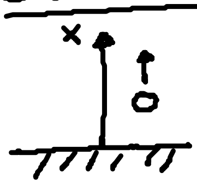
$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (4.4)$$

$$\longrightarrow \quad x = x(t - t_0, x_0, E) \quad (4.5)$$

Integrationsvariablen: $E,\ x(t_0)$ [i.f. o.B.d.A.: $t_0 = 0$]

a) Senkrechter Wurf bei konstanter Gewichtskraft:



$$m\ddot{x} \underset{(3.9)}{=} -mg$$

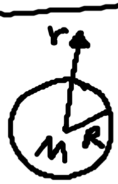
$$\longrightarrow \quad \dot{x}(t) = -gt + v_0 \quad (4.7)$$

$$\longrightarrow \quad x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \quad (4.8)$$

• Steighöhe h von $x_0 = 0$. Umkehrpkt.: $\dot{x} = 0 \xrightarrow{(4.7)} t = \frac{v_0}{g}$

$$\xrightarrow{(4.8)} \boxed{h = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}} \quad (4.9)$$

b) Senkrechter Wurf im Gravitationspotential.



$$m\ddot{r} \underset{(3.1)}{=} -\gamma\frac{mM}{r^2} \underset{g = \gamma\frac{M}{R^2}}{=} -mg\frac{R^2}{r^2} \quad (4.10)$$

1. Integral: $$\frac{m}{2}\dot{r}^2 \underbrace{- mg\frac{R^2}{r}}_{U(r)\ \ldots\ \text{pot. Energie im Grav.potential}} = E \quad (4.11)$$

2. Integral: ($t_0 = 0$)

$$t = \int_{R}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E + \underbrace{mg\frac{R^2}{r}}_{-U(r)}\right)}} \quad (4.12)$$

(R: an Erde bei $t=0$)

• parabolische / 2. kosmische Fluchtgeschwindigkeit v_0:

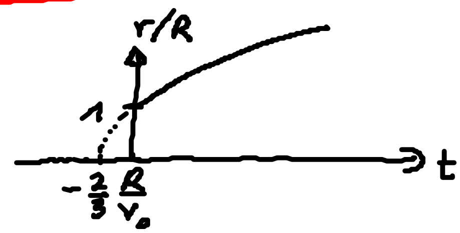
$$\boxed{E = 0 \;\hat{=}\; v(r \to \infty) = 0}$$

aus EES (4.11) mit $r = R$: $\boxed{v_0 = \dot{r}(0) \underset{E=0}{=} \sqrt{2gR}}$ $\underset{\text{Erde}}{=} 11{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{s}}$ (4.13)

$R = 6000$ km

aus (4.12) $t \underset{E=0}{\overset{(4.13)}{=}} \int_R^{r(t)} \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{r}{R}}\,dr = \frac{2}{3}\frac{1}{v_0\sqrt{R}}\, r^{3/2}\Big|_R^{r(t)} = \frac{2}{3}\frac{1}{v_0\sqrt{R}}\left[r^{3/2}(t) - R^{3/2}\right]$

$$\longrightarrow \boxed{r(t) = R\left[1 + \frac{3}{2}\frac{v_0}{R}t\right]^{2/3}} \quad (4.14)$$



mit $\dot{r}(t) = \frac{v_0}{\left[1 + \frac{3}{2}\frac{v_0}{R}t\right]^{1/3}} \longrightarrow 0, \quad t \to \infty$

• a) aus b): $\frac{3}{2}\frac{v_0}{R}t \ll 1$: Taylorentw. von (4.14) mit (4.13)

$[(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x]$ $\longrightarrow$ $\boxed{r(t) = \underbrace{R + v_0 t - \frac{g}{2}t^2}_{(4.8)} + \underbrace{\frac{1}{6}\frac{v_0^3}{R^2}t^3}_{\text{Korrektur}} + \ldots}$ (4.15)

4.3 Bewegung im geschwindigkeitsabh. Kraftfeld

• Löse: $m\ddot{x} = F(\dot{x}) \xrightarrow[\dot{x}=v]{} m\dot{v} = F(v)$ ... Dgl. 1. Ordnung

– Trennung der Variablen: $\dot{v} = \frac{dv}{dt} \longrightarrow t = m\int_{v_0 = v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{F(v)}$

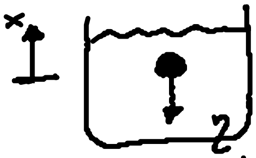
$\longrightarrow v(t)$

– 2. Integral: $x(t) = \int_0^t v(t')\,dt' + x_0$

x_0, v_0 … Integrationsvariablen

- in der Regel: $t \to \infty$: schleichende Bewegung: $m\dot{v} = F(v) = 0$
  $\longrightarrow v_\infty$ … Grenzgeschw.

a) Freier Fall mit Stokesscher Reibung:

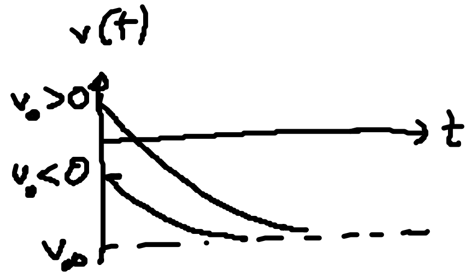


… Viskosität

- $m\dot{v} = -mg - \beta v \quad (4.17) \qquad \beta = 6\pi\eta a$ … Kugel
- $F(v) = 0 \longrightarrow \boxed{v_\infty = -\frac{mg}{\beta}} < 0 \quad (4.18)$

- $$t \underset{(4.16)}{=} -m \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{mg + \beta v} \underset{(4.18)}{=} -\frac{m}{\beta} \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{\underbrace{\frac{mg}{\beta}}_{-v_\infty} + v} = -\frac{m}{\beta} \ln \frac{-v_\infty + v(t)}{-v_\infty + v_0}$$

$$\longrightarrow -\frac{t}{\tau} = \ln \frac{-v_\infty + v(t)}{-v_\infty + v_0} \Big| e^{\cdots} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} & v(t) = v_\infty + (v_0 - v_\infty)\, e^{-t/\tau} \\ & \tau = \frac{m}{\beta} \text{ … Relaxationszeit} \end{aligned}} \quad (4.19)$$



! $v(t) \to v_\infty$, $t \to \infty$

Bsp: $\eta(H_2O) = 0{,}001 \frac{kg}{ms}$

$$\left.\begin{aligned} & a = 10^{-6}\,m \\ & \varrho = 1 \frac{g}{cm^3} = 10^3 \frac{kg}{m^3} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} & m = \varrho \frac{4\pi}{3} a^3 \\ & \approx 4 \cdot 10^{-15}\,kg \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \tau = \frac{m}{6\pi\eta a} \approx 10^{-7}\,s\,!$$

- Anwendung: mikroskop. Modell für Ohmsches Gesetz

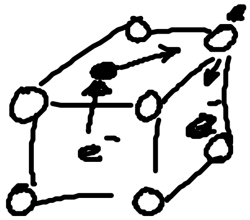
$-mg \longrightarrow eE$ …. angelegtes Feld beschl. $e^- \xrightarrow[(4.18)]{} \boxed{v_\infty = \frac{eE}{\beta}}$ (4.20)

elektr. Stromdichte: $j = n e v_\infty := \sigma E$ … Ohmsches Gesetz

n … Ladungsträgerdichte

$$\xrightarrow{(4.20)} \boxed{\sigma = \frac{ne^2}{\beta} \underset{(4.19)}{=} \frac{ne^2\tau}{m}} \quad (4.21) \text{ … spezif. Leitfähigkeit}$$

Mechanismus für $\tau = \frac{m}{\beta}$



Reibung β durch Stöße von e^- mit Phononen (Gitterschwingungen) & Verunreinigungen im Metall

$\longrightarrow$ τ ... mittleren stoßfreien Zeit

b) Freier Fall mit Newtonscher Reibung (Luftwiderstand):

- Löse $\quad m\dot{v} = -mg + \gamma v^2 \quad \longrightarrow$ Übungen

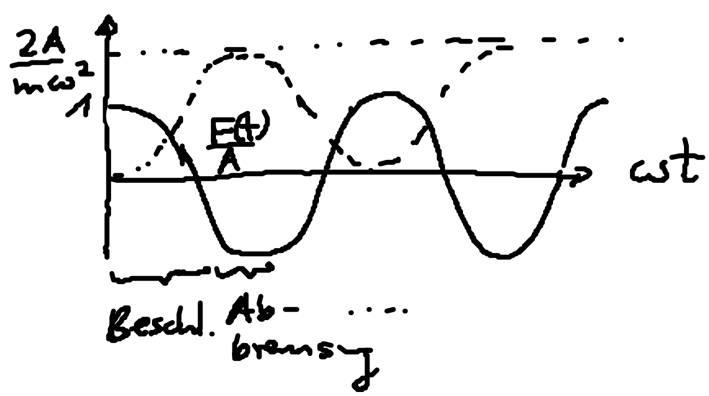
4.4. Reine zeitabhängige Kraft

- Löse: $\quad m\ddot{x} = F(t) \xrightarrow{\text{1. Integral}} \dot{x}(t) - v_0 = \frac{1}{m}\int_0^t F(t')\,dt' \quad (4.22)$

$$\xrightarrow{\text{2. Integral}} x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{m}\int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' F(t'') \quad (4.23)$$

- Bsp: $\quad F(t) = A\cos\omega t$

$$\xrightarrow[\text{o.B.}]{} \quad x = \underbrace{x_0 + vt}_{\substack{\text{gleichf.} \\ \text{Bewegung}}} + \frac{A}{m\omega^2}(1 - \underbrace{\cos\omega t}_{\substack{\text{in Gegenphase zur} \\ \text{erregenden Kraft}}})$$



5. Eindimensionaler harmonischer Oszillator

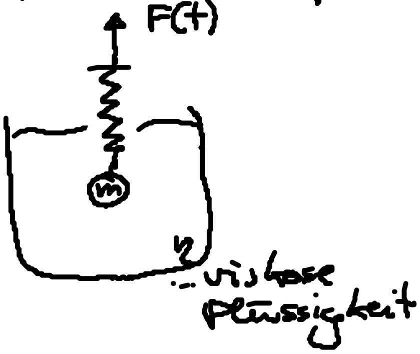
- volles Problem:

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_{ges}(x,\dot{x},t) \\ \text{mit } F_{ges}(x,\dot{x},t) &= \underbrace{-fx}_{\substack{\text{harm./}\\\text{Feder-}\\\text{kraft}}} \underbrace{-\alpha\dot{x}}_{\substack{\text{Stokes-}\\\text{sche}\\\text{Reibung}}} + F(t) \end{aligned}} \quad (5.1)$$

- Realisierung:

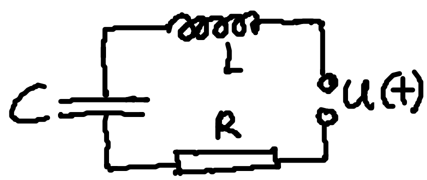
<u>mechanisch</u>

Maxwell-Körper



<u>elektromagnetisch</u>

Schwingkreis



$$\underbrace{L\ddot{Q}}_{\text{„Masse"}} + \underbrace{R\dot{Q}}_{\text{„Reibung"}} + \underbrace{\frac{1}{C}Q}_{\text{„Feder"}} = U(t), \quad \dot{Q}(t) = I(t)$$

- harm. Oszillator: – fundamentale Bedeutung in der Physik
  – eines der wenigen exakt lösbaren Probleme

- dient zur:
  Veranschaulichung von fundamentalen Konzepten

- <u>mathem. Details</u>: [MMP, Kap. 8]

  (5.1): Lineare Dgl. 2. Ordnung in Zeit für $x(t)$
  mit Inhomogenität [F(t)]

  ↳ Superpositionsprinzip → $x_{part}(t)$

  ↳ 2. Integrationskonst.

allg. Lsg.:

$$\boxed{x(t) = \underbrace{a\,x_1(t) + b\,x_2(t)}_{x_{hom}(t)} + x_{part}(t)} \quad (5.2)$$

Lsg. von homog. Dgl.
($\rightarrow F(t) = 0$)

wobei $x_1(t), x_2(t)$ linear unabh. sind