• Oszillatorgüte:

$$\boxed{Q = \frac{2\pi \text{ mittlere Energie: } \overline{T+U}}{\text{Energieverlust pro Periode: } \alpha\int_0^{2\pi/\omega_d} \dot{x}^2\, dt}} \quad (5.22)$$

hohe Güte: $\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2m}{\alpha} \gg \frac{1}{\omega_0}$

also: $$Q = 2\pi \frac{\frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t} \quad \} (5.9)}{\alpha A^2 e^{-2\gamma t} \omega_d^2 \underbrace{\int_0^{2\pi/\omega_d} \sin^2(\omega_d - \varphi)\, dt}_{\pi/\omega_d}}$$

$$\xrightarrow{\omega_d \approx \omega_0} \boxed{Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\omega_0 \tau}{2} \gg 1} \quad (5.23)$$

5.3 Harmonischer Oszillator mit eingeprägter Kraft

(erzwungene Schwingung)

• Grundgl.: $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + m\omega_0^2 x = F(t)$ (5.26)

allg. Lsg.: $x(t) = \underbrace{x_{hom}(t)}_{\text{bekannt}} + \underbrace{x_{part}(t)}_{\text{unbekannt}}$ (5.27)

a) harmonische Kraft: $F(t) = F_\omega \cos\omega t$

• Übergang ins Komplexe: $x(t) = \text{Re}\, z(t)$

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_\omega}{m} \underbrace{e^{i\omega t}}_{\text{Re}\, e^{i\omega t} = \cos\omega t!} \quad (5.28)$$

• Erfahrung: nach Einschwingen folgt Oszillator der Kraft

$\longrightarrow$ Ansatz: $z_{part}(t) = A_\omega e^{i\omega t}$ (5.29)

in (5.28): $(-\omega^2 + 2i\gamma\omega + \omega_0^2) A_\omega \cancel{e^{i\omega t}} = \frac{F_\omega}{m} \cancel{e^{i\omega t}}$

$$\rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} A_\omega &= \chi(\omega)\,\frac{F_\omega}{m} \\ \text{mit} \quad \chi(\omega) &= \frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+2i\gamma\omega} \end{aligned}} \qquad (5.30)$$

... <u>dynamische Suszeptibilität</u>

(i) $\chi(\omega) = f(\omega, \underbrace{\omega_0, \gamma}_{\text{„Kenngrößen"}})$

(ii) vermittelt Antwort A_ω auf äußeres Feld/Störung/Kraft

(iii) $\chi(0)$ ... statische Suszeptibilität

(iv) andere Bsp.: Magnetisierung $\underline{M} = \chi_m \underline{H}$

Polarisation $\underline{P} = \chi_e \underline{E}$

· Umschreibung: Erinnerung:

$$\frac{1}{a+ib}\,\frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,e^{i\delta}, \quad \tan\delta = \frac{-b}{a} \qquad (5.31)$$

$$\boxed{\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega) = |\chi(\omega)|\,e^{-i\delta(\omega)}} \qquad (5.32)$$

mit
$$\boxed{\begin{aligned} &\chi'(\omega) = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} \qquad \chi''(\omega) = \frac{-2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} < 0 \\ &|\chi(\omega)| = \sqrt{\chi(\omega)\chi^*(\omega)} = \frac{1}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2\right]^{1/2}} \\ &\tan\delta(\omega) = -\frac{\chi''}{\chi'} = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \end{aligned}} \qquad (5.33)$$

· <u>reelle Lsg:</u> $(\gamma < \omega_0)$

$$x(t) = \mathrm{Re}\, z(t) = \mathrm{Re}\left[\underbrace{z_{hom}(t)}_{(5.20)} + \underbrace{|\chi(\omega)|\,\frac{F_\omega}{m}\,e^{i(\omega t-\delta(\omega))}}_{z_{part}}\right]$$

$$\longrightarrow \quad x(t) = \underbrace{B\, e^{-\gamma t} \cos(\omega_d t - \varphi)}_{x_{hom}(t)} + \underbrace{|\chi(\omega)| \frac{F_\omega}{m} \cos[\omega t - \delta(\omega)]}_{x_{part}(t)}$$

Einschwingvorgang $\to 0$, $t \gg \tau = \gamma^{-1}$

eingeschwungener Zustand

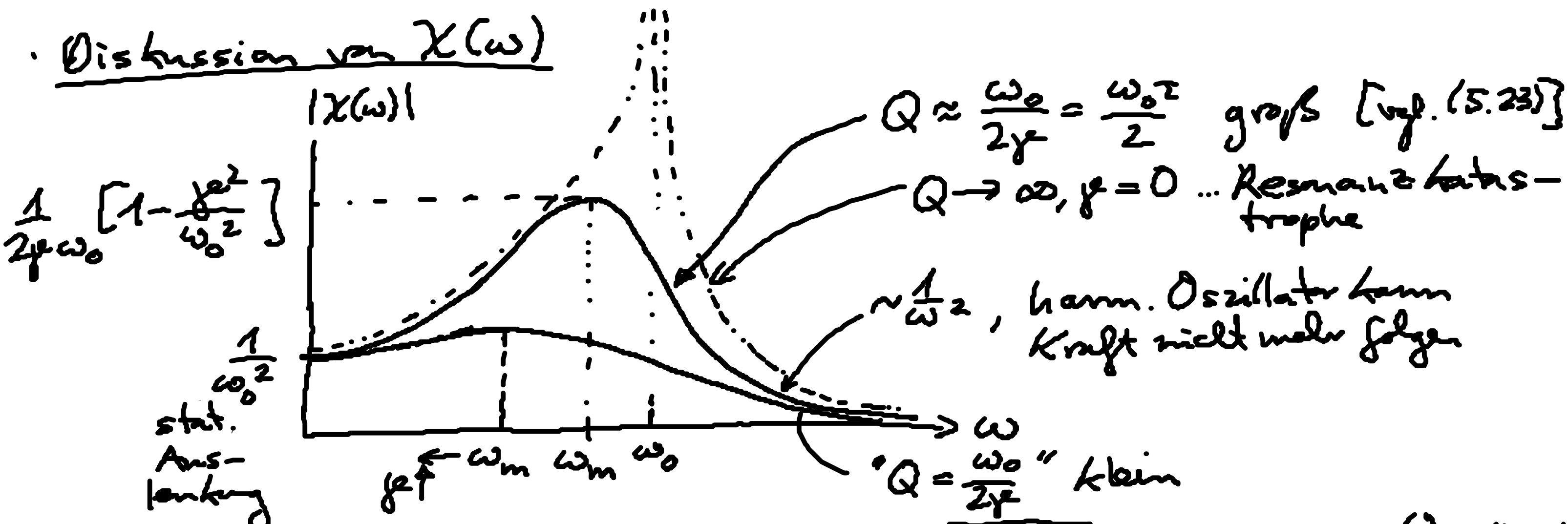
„Resonanzanregung“ (für $\omega \to \omega_m$ (s. unten))

· **transientes Verhalten:**

$x_{hom}(t)$ & $x_{part}(t)$

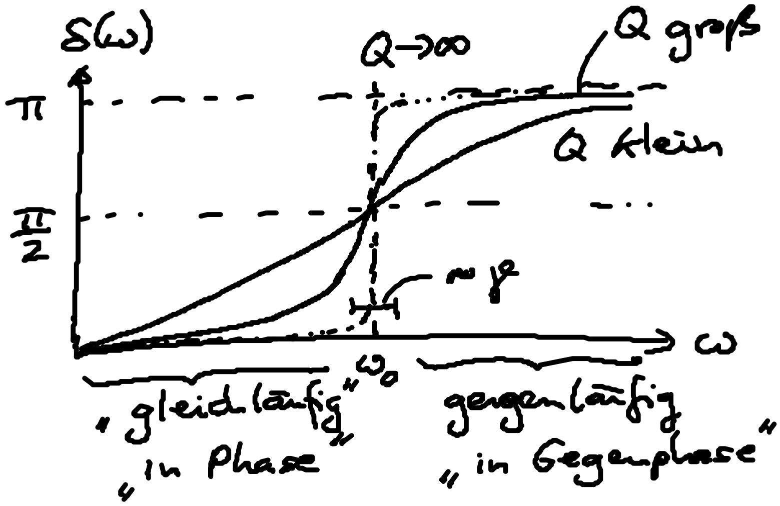
$\hat{=}$ Überlagerung zweier Schwingungen: i.a. $\omega_d \neq \omega$

· **Diskussion von $\chi(\omega)$**



Maximum: $\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$, $\gamma < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ (5.34)

$[(1-x)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x] \quad \approx \omega_0\left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right)$, $\gamma \to 0$ (5.35)



$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

• Näherung: $\Delta\omega = \omega - \omega_0 \ll \omega_0$, $\gamma \ll \omega_0$

$$(5.30) \longrightarrow \chi(\Delta\omega) \approx -\frac{1}{2\omega_0(\Delta\omega - i\gamma)} \quad \to \quad |\chi(\omega)| \approx \frac{1}{2\omega_0\gamma\sqrt{1+\left(\frac{\Delta\omega}{\gamma}\right)^2}}$$

$$\left[\omega_0^2 - \omega^2 \approx \underbrace{(\omega_0+\omega)}_{\approx 2\omega_0}\underbrace{(\omega_0-\omega)}_{\Delta\omega}\right]$$

... Maximum (Peak) mit Höhe $\sim \frac{1}{\gamma}$, Breite $\sim \gamma$

(5.36)

$$\to \tan\delta(\omega) \approx \frac{\gamma}{\Delta\omega}$$

... Übergangsbereich: Breite $\sim \gamma$

• Leistungsbilanz:

$$(2.25) \quad \frac{d}{dt}\underbrace{\left[\frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\omega_0^2 x^2\right]}_{\text{mechan. Energie } E_{mech}} = F_{diss}\dot{x} = \underbrace{-\alpha\dot{x}^2}_{\text{Reibungs-verlustleistung}} + \underbrace{F(t)\cdot\dot{x}}_{\text{Leistung der äußeren Kraft}} \qquad (5.37)$$

• eingeschwungener Zustand: $x(t) = x_{part}(t)$

$$\frac{d}{dt}\langle E_{mech}\rangle = 0 \xrightarrow{(5.37)} \alpha\langle\dot{x}^2\rangle = \langle F(t)\dot{x}\rangle$$

„Dissipation" = „Absorption"

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \ldots dt$$

gemittelte, dissipierte Energie pro Zeit:

$$\langle N(\omega)\rangle = \underbrace{\alpha}_{2\gamma m}\langle\dot{x}^2\rangle \underset{(5.31)}{=} 2\gamma m \underbrace{|\chi(\omega)|^2}_{-\chi''(\omega)/2\gamma\omega} \frac{F_\omega^2}{m^2}\omega^2 \underbrace{\langle\sin^2(\omega t - \delta(\omega))\rangle}_{=\frac{1}{2}}$$

[s. (5.33)]

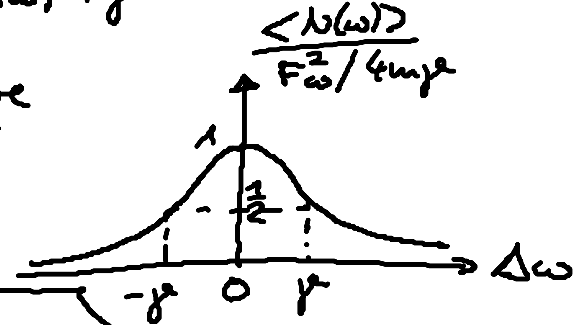
$$\boxed{\langle N(\omega)\rangle = -\frac{\omega}{2m}F_\omega^2\,\chi''(\omega)} \qquad (5.38)$$

... absorbierte = dissipierte Leistung ist bestimmt durch $\underline{\chi''(\omega)}$!!

· Näherung: $\Delta\omega \ll \omega_0$, $\gamma \ll \omega_0$:

$$\chi''(\omega) \underset{(5.36)}{\approx} -\frac{1}{2\omega_0}\frac{\gamma}{(\Delta\omega)^2+\gamma^2}$$

... <u>Lorentzkurve</u>



$$\xrightarrow[\omega\approx\omega_0]{(5.38)} \boxed{\langle N(\omega)\rangle \approx \frac{F_\omega^2}{4m}\frac{1}{\gamma}\frac{1}{1+\left(\frac{\Delta\omega}{\gamma}\right)^2}} \quad (5.39)$$

b) Der Formalismus der linearen Antwort I

(Methode der Greenschen Fkt.)

- dynamische Eigenschaften eines Systems?

äußerer Stimulus/erregende Kraft $\longrightarrow$ Reaktion/Antwort

Bsp: $A_\omega = \chi(\omega)\,\frac{F_\omega}{m}$ ... „linear"

- Ziel: „allgemeinste <u>lineare</u> Antwort"

- Bsp. harm. Osillator: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + m\omega_0^2 x = \tilde{F}(t) = \frac{F(t)}{m}$ (5.40)

beliebige Kraft $\tilde{F}(t)$ $\xrightarrow[\text{Antwort"}]{\text{„allg. lineare}}$ $\underbrace{x_{part}(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-t')\,\tilde{F}(t')\,dt'}_{\text{„Faltung"}}$

(bzw: $I(t) = \int_{-\infty}^{t} \tilde{F}(t')\,dt'$

... Kraftstoß)