• harmonischer Oszillator mit eingeprägter harmonischer Kraft:

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_\omega}{m} e^{i\omega t}$$

$$\longrightarrow \quad z_{part}(t) = A_\omega e^{i\omega t} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} A_\omega = \chi(\omega)\,\dfrac{F_\omega}{m} \\ \text{mit } \chi(\omega) = \dfrac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma\omega} \end{array}} \quad (5.30)$$

... dynam. Suszeptibilität

b) Der Formalismus der linearen Antwort I
(Methode der Greenschen Fkt.)

• dynam. Eigenschaften eines Systems?
äußerer Stimulus/erregende Kraft $\longrightarrow$ Reaktion/Antwort

Bsp: $A_\omega = \chi(\omega)\,\dfrac{F_\omega}{m}$ ... „linear"

• Ziel: „allgemeinste linere Antwort"

• Bsp: harm. Oszillator: $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \tilde{F}(t) = \dfrac{F(t)}{m}$ (5.40)

beliebige Kraft $\tilde{F}(t) \xrightarrow[\text{Antwort"}]{\text{„allg. lineare}}$ $x_{part}(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{t} G(t-t')\,\tilde{F}(t')\,dt'}_{\text{Faltung}}$ (5.41)

(bzw: $I(t) = \int_{-\infty}^{t} \tilde{F}(t')\,dt'$
... Kraftstoß)

(i) $\int_{-\infty}^{t} \dots$ Kausalitätsprinzip („Wirkung nach Ursache")

(ii) $G(t-t') \dots$ „Greensche Fkt."

• Führe ein $G_c(t-t') = \begin{cases} G(t-t'), & t > t' \\ 0, & t < t' \end{cases}$ … „kausale Greensche Fkt."

$$(5.41) \longrightarrow \boxed{x_{part}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_c(t-t')\,\tilde{F}(t')\,dt'} \quad (5.42)$$

• Bestimmungsgl. für $G_c(t-t')$:

$$(5.42) \text{ in } (5.40) \longrightarrow \tilde{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2\right]}_{\text{Differentialoperator } \hat{L}(t)} G_c(t-t')\,\tilde{F}(t')\,dt' \quad (5.43)$$

$$\longrightarrow \underbrace{\hat{L}(t)\,G}_{= \text{"}\underline{1}\text{"} \dots \text{ Eins-Operator}}\tilde{F} = \tilde{F}$$

[vgl: $\underbrace{\underline{\underline{A}}}_{\underline{1}}\underline{v} = \underline{v}$ bzw $\sum_j A_{ij} v_j = v_i$, $[\underline{1}]_{ij} = \delta_{ij}$]

hier Zeitraum: Führe ein: „δ-Funktion" (Distribution)

so daß:
$$\boxed{\tilde{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(t-t')}_{\text{1-Operator im Zeitraum}} \tilde{F}(t')\,dt'} \quad (5.44)$$

1-Operator im Zeitraum: $\delta(t-t')$ stark gepeakt bei $t=t'$

$$\text{vgl. mit } (5.43) \longrightarrow \boxed{\hat{L}(t)\,G_c(t-t') = \delta(t-t')} \quad (5.45)$$

c) Die Diracsche „δ-Funktion"

• Grundeigenschaft:
$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x')\,f(x')\,dx' = f(x)} \quad (5.46)$$

$\delta(x-x') \dots$ „$\underline{1}$-Operator im Raum der Fktn. $f(x)$"

[vgl: $a_i = \sum_j \delta_{ij} a_j$, $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

hier: $\sum_j \delta_{ij} \ldots \longrightarrow \int \delta(x-x') \ldots dx'$]

• „δ-Fkt." als Grenzfall stetiger Fktn:

Satz:

$$\boxed{\begin{aligned} &\delta(x-x') = \text{“}\lim_{\varepsilon\to 0} \delta_\varepsilon(x-x')\text{”} \\ &\text{wobei 1. } \delta_\varepsilon(x-x') \underset{\xi = \frac{x-x'}{\varepsilon}}{=\!=} \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{g(\xi)}_{\text{gutartig}} \\ &\text{2. } \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x-x') \underbrace{d(x-x')}_{\varepsilon\, d\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, d\xi = 1 \\ &\text{3. “…”: in (5.46) erst } \int \ldots \text{ dann } \lim_{\varepsilon\to 0} \end{aligned}} \quad (5.47)$$

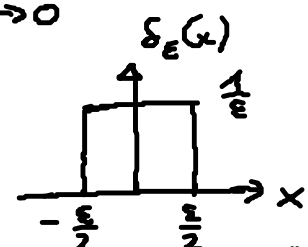
(5.47) ⟶ (5.46)? Bew:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta_\varepsilon(x-x')}_{\frac{1}{\varepsilon} g(\xi)} f(x')\, dx' \underset{\substack{\frac{x-x'}{\varepsilon} = \xi \\ \varepsilon\, d\xi = -dx'}}{=\!=} \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g(\xi) f(x-\varepsilon\xi)\, d\xi}_{\text{“ordentlich”} \longrightarrow \int \lim_{\varepsilon\to 0} \ldots}$$

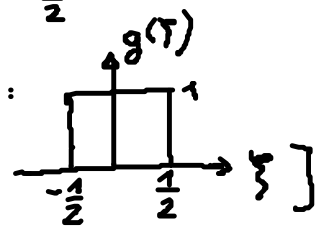
$$= f(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, d\xi}_{=1} = f(x) \quad \text{qed}$$

⟶ i.f. Rechne mit $\delta(x-x')$ ohne $\lim_{\varepsilon\to 0} \ldots$

• Bsp: (i) $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{für } |x| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$ (5.48)

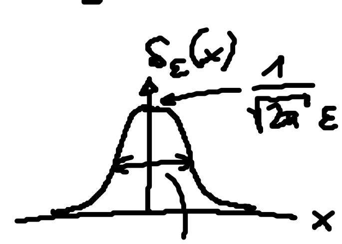


[g(ξ):



]

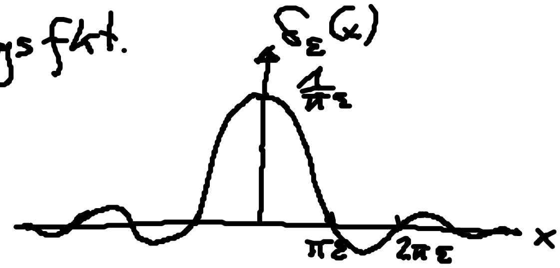
(ii) $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$ … Gauß fkt) (Glockenkurve) (5.49)



(iii) $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi\varepsilon}\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}$ ... Lorentzkurve (5.50)

(iv) $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi\varepsilon}\,\frac{\sin\frac{x}{\varepsilon}}{x/\varepsilon} \underset{\text{o.B.}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{1/\varepsilon} dq\, e^{iqx}$ (5.51)

... Spaltbeugungsfkt. der Optik



· Eigenschaften der δ-Funktion.

(i) $\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \text{“}\infty\text{”}, & x = 0 \end{cases}$ (5.52)

(ii) $\int_a^b \delta(x-x')\, f(x')\, dx' = \begin{cases} f(x) & \dots\ a < x < b \\ 0 & \dots\ \text{sonst} \end{cases}$ (5.53)

(iii) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\,\delta(x)$ (5.54)

$\delta(-x) = \delta(x)$ ... gerade Fkt. (5.55)

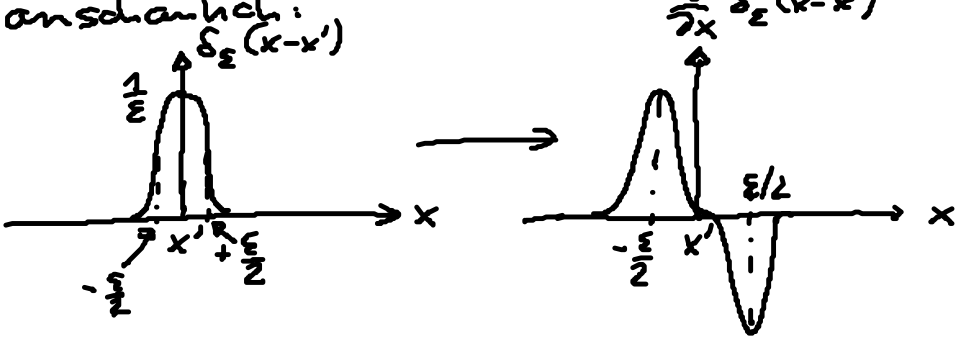
(iv) $\delta(x) \underset{(5.51)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm iqx}\,\frac{dq}{2\pi}$

... Fourier-Darstellung

(v) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\delta(x-x')\, f(x')\, dx' = -\int \left[\frac{\partial}{\partial x'}\delta(x-x')\right] f(x')\, dx'$

$= f'(x)$ (5.57)

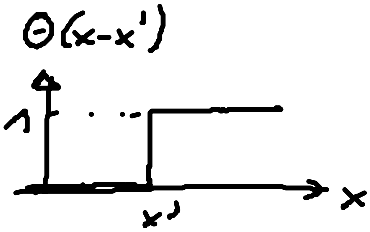
anschaulich:



$$\int \frac{\partial}{\partial x} \delta_\varepsilon(x-x') f(x')\,dx' \approx \frac{1}{\varepsilon}\int \left[\delta_\varepsilon\left(x-x'+\frac{\varepsilon}{2}\right) - \delta_\varepsilon\left(x-x'-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] f(x')\,dx'$$

$$\approx \frac{1}{\varepsilon}\left[f\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right) - f\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{\text{zentr. Ableitg}} f'(x)$$

- <u>Stufenfunktion:</u>



(i) $$\boxed{\Theta(x-x') = \begin{cases} 1, & x-x'>0 \\ 0, & x-x'<0 \end{cases}} \quad (5.58)$$

(ii) $$\Theta(x) \underset{(5.53)}{=} \int_{\infty}^{x} \delta(x')\,dx' \quad (5.59)$$

$$\longrightarrow \boxed{\delta(x) = \frac{d}{dx}\Theta(x)} \quad (5.60)$$

d) Der Formalismus der linearen Antwort II

- Es galt: $\hat{L}(t)\, G_c(t-t') = \underbrace{\delta(t-t')}_{\delta\text{-Kraft}}$, $\quad \hat{L}(t) = \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega_0^2 \quad (5.61)$

  $\int \delta(t-t')\,dt = 1 \ldots$ δ-Kraftstoß

- Bestimmung der Greensche Fkt. aus Stetigkeits- und Sprungbed.:

  (i) Kausalität: $\boxed{G_c(\tau) = 0, \quad \tau < 0}$

  (ii) Stetigkeit: $G_c(\varepsilon) - \underbrace{G_c(-\varepsilon)}_{=0} = 0, \quad \varepsilon \to 0$

  $\longrightarrow \boxed{G_c(0) = 0}$