

- harmonischer Oszillator mit eingepprägter harmonischer Kraft:

$$\ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

$$\longrightarrow z_{\text{part}}(t) = A_\omega e^{i\omega t}$$

$$\longrightarrow A_\omega = \chi(\omega) \frac{F_0}{m} \quad (5.30)$$

$$\text{mit } \chi(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\gamma}$$

... dynam. Suszeptibilität

b) Der Formalismus der linearen Antwort I

(Methode der Greenschen Fkt.)

- dynam. Eigenschaften eines Systems?

äußerer Stimulus/erregende Kraft $\longrightarrow$ Reaktion/Antwort

$$\text{Bsp: } A_\omega = \chi(\omega) \frac{F_0}{m} \dots \text{„linear“}$$

- Ziel: „allgemeinste lineare Antwort“

$$\text{• Bsp: harm. Oszillator: } \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \tilde{F}(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (5.40)$$

$$\text{beliebige Kraft } \tilde{F}(t) \xrightarrow{\text{„allg. lineare Antwort“}} x_{\text{part}}(t) = \int_{-\infty}^t G(t-t') \tilde{F}(t') dt' \quad (5.41)$$

$$(\text{bzw: } I(t) = \int_{-\infty}^t \tilde{F}(t') dt')$$

... Kraft stop

Faltung

(i) $\int_{-\infty}^t \dots$ Kausalitätsprinzip
("Wirkung nach Ursache")

(ii) $G(t-t')$... "Greensche Fkt."

• Führe ein $G_c(t-t') = \begin{cases} G(t-t'), & t > t' \\ 0, & t < t' \end{cases} \dots$ kausale Greensche Fkt.

$$(S.41) \rightarrow \boxed{x_{\text{part}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_c(t-t') \tilde{F}(t') dt'} \quad (S.42)$$

• Bestimmungsgl. für $G_c(t-t')$:

$$(S.42) \text{ in } (S.40) \rightarrow \tilde{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \right]}_{\text{Differentialoperator } \hat{L}(t)} G_c(t-t') \tilde{F}(t') dt' \quad (S.43)$$

$$\rightarrow \underbrace{\hat{L}(t) G \tilde{F}}_{= "1"} = \tilde{F} \quad \dots \text{Eins-Operator}$$

$$[\text{vgl: } \underbrace{\underline{A}}_1 \underline{v} = \underline{v} \quad \text{bzw. } \sum_j A_{ij} v_j = v_i, \quad [1]_{ij} = \delta_{ij}]$$

hier Zeitraum: führe ein: "S-Funktion" (Distribution)

$$\text{so daß: } \boxed{\tilde{F}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(t-t')}_{\substack{\text{1-Operator im Zeitraum:} \\ \delta(t-t') \text{ stark gepackt bei } t=t'}} \tilde{F}(t') dt'} \quad (S.44)$$

$$\text{vgl. mit (S.43)} \rightarrow \boxed{\hat{L}(t) G_c(t-t') = \delta(t-t')} \quad (S.45)$$

c) Die Diracsche "S-Funktion"

$$\text{• Grundeigenschaft: } \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x') f(x') dx' = f(x)} \quad (S.46)$$

$\delta(x-x')$... "1-Operator im Raum der Fktn. $f(x)$ "

[vgl: $a_i = \sum_j \delta_{ij} a_j$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

hier: $\sum_j \delta_{ij} \dots \rightarrow \int \delta(x-x') \dots dx'$

• δ -Fkt. als Grenzf. d. regulärer Fktn.:

Satz: $\delta(x-x') = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x-x')$

wobei 1. $\delta_\varepsilon(x-x') \stackrel{\xi = \frac{x-x'}{\varepsilon}}{=} \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{g(\xi)}_{\text{gutartig}}$ (S.47)

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(x-x') \underbrace{dx}_{\varepsilon d\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi = 1$

3. "...": in (S.46) erst $\int \dots$ dann $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$

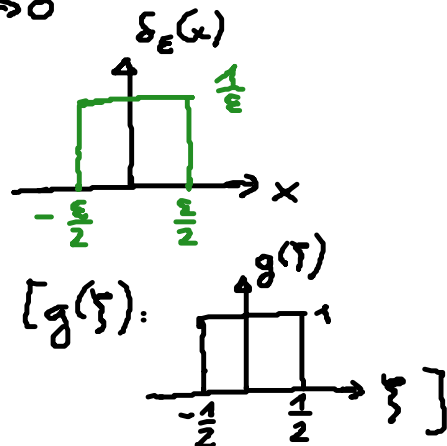
(S.47) $\rightarrow$ (S.46)? Bew:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta_\varepsilon(x-x')}_{\frac{1}{\varepsilon} g(\xi)} f(x') dx' &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g(\xi) f(x-\varepsilon\xi)}_{\text{"ordentlich"} \rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dots} d\xi \\ &= f(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi}_{=1} = f(x) \text{ qed} \end{aligned}$$

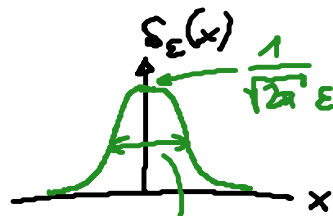
$\varepsilon d\xi = -dx'$

$\rightarrow$ i.f. Redne mit $\delta(x-x')$ ohne $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \dots$

• Bsp: (i) $\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{für } |x| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$ (S.48)



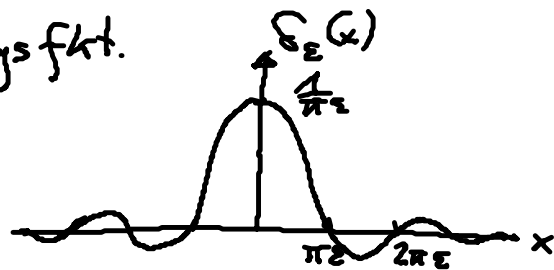
(ii) $\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \varepsilon} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$... Gauß fkt) (Glockenkurve) (S.49)



$$(iii) \delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi\varepsilon} \frac{1}{1 + (\frac{x}{\varepsilon})^2} \quad \dots \text{Lorentzkurve} \quad (S.50)$$

$$(iv) \delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi\varepsilon} \frac{\sin \frac{x}{\varepsilon}}{x/\varepsilon} \stackrel{\text{o.B.}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} dq e^{iqx} \quad (S.51)$$

... Spaltbeugungsfkt.
der Optik



Eigenschaften der δ -Funktion.

$$(i) \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad (S.52)$$

$$(ii) \int_a^b \delta(x-x') f(x') dx' = \begin{cases} f(x) & \dots a < x < b \\ 0 & \dots \text{sonst} \end{cases} \quad (S.53)$$

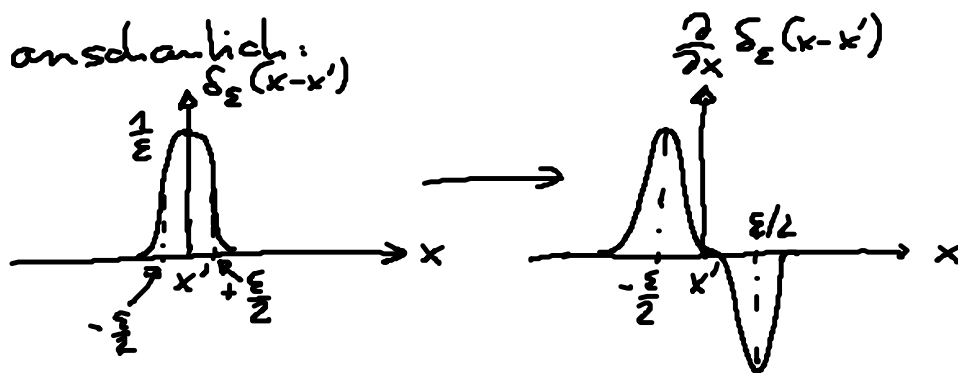
$$(iii) \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad (S.54)$$

$$\delta(-x) = \delta(x) \quad \dots \text{gerade Fkt.} \quad (S.55)$$

$$(iv) \delta(x) \stackrel{(S.51)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm iqx} \frac{dq}{2\pi} \quad \dots \text{Fourier-Darstellung}$$

$$(v) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \delta(x-x') f(x') dx' = - \int \left[\frac{\partial}{\partial x'} \delta(x-x') \right] f(x') dx' = f'(x) \quad (S.57)$$

anschaulich:

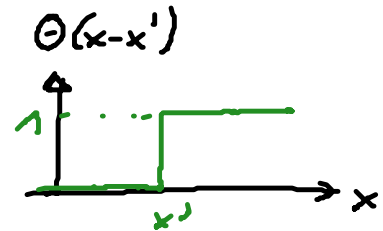


$$\int \frac{2}{\varepsilon} \delta_{\varepsilon}(x-x') f(x') dx' \approx \frac{1}{\varepsilon} \left[\delta_{\varepsilon}(x-x'+\frac{\varepsilon}{2}) - \delta_{\varepsilon}(x-x'-\frac{\varepsilon}{2}) \right] f(x') dx'$$

$$\approx \frac{1}{\varepsilon} \left[f(x+\frac{\varepsilon}{2}) - f(x-\frac{\varepsilon}{2}) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{zentr. Ableitung}}{\varepsilon \rightarrow 0} f'(x)$$

• Stufenfunktion:

(i) $\Theta(x-x') = \begin{cases} 1, & x-x' > 0 \\ 0, & x-x' < 0 \end{cases} \quad (S.58)$



(ii) $\Theta(x) \stackrel{(S.53)}{=} \int_{-\infty}^x \delta(x') dx' \quad (S.58)$

$\rightarrow \boxed{\delta(x) = \frac{d}{dx} \Theta(x)} \quad (S.60)$

d) Der Formalismus der linearen Antwort II

• Es gilt: $\hat{L}(t) G_c(t-t') = \underbrace{\delta(t-t')}_{\delta \text{ Kraft}}, \quad \hat{L}(t) = \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma \frac{d}{dt} + \omega_0^2 \quad (S.61)$
 $\int \delta(t-t') dt = 1 \dots \delta\text{-Kraftstyp}$

• Bestimmung der Greensche Fkt. aus Stetigkeits- und Sprungbed.:

(i) Kausalität: $\boxed{G_c(\tau) = 0, \tau < 0}$

(ii) Stetigkeit: $G_c(\varepsilon) - \underbrace{G_c(-\varepsilon)}_{=0} = 0, \varepsilon \rightarrow 0$

$\rightarrow \boxed{G_c(0) = 0}$

