3. Keplersches Gesetz:

$$T^2 = c\,a^3, \quad c = \frac{4\pi^2}{\gamma(m_s+m_p)}$$

a ... große Halbachse der Ellipse für <u>Relativbewegung</u>

$\longrightarrow$ bezogen auf SS: $a_s = \frac{m_p}{M}\,a$

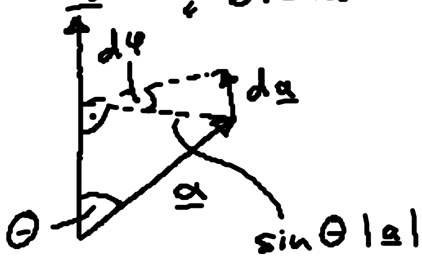
$a_p = \frac{m_s}{M}\,a$

7. Nichtinertialsysteme

7.2. Rotierende BS

a) Winkelgeschwindigkeit:

- **Def:** $\underline{\omega}$ „Drehachse"



$$\underline{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\,\underline{e}_\omega \qquad (7.4) \qquad |\underline{e}_\omega| = 1$$

... Winkelgeschw.

- bel. Vektor:

$$\left.\begin{array}{l} d\underline{a} \perp \underline{a}, \underline{\omega} \\ |d\underline{a}| = \sin\Theta\,|\underline{a}|\,d\varphi \end{array}\right\} \; d\underline{a} = \underbrace{d\varphi\,\underline{e}_\omega}_{\underline{\omega}\,dt} \times \underline{a} \xrightarrow{\frac{1}{dt}} \boxed{\frac{d\underline{a}}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{a}} \quad (7.5)$$

- **Bsp:** $\underline{a} = \underline{r} \longrightarrow \boxed{\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{\omega} \times \underline{r}} \quad (7.6)$

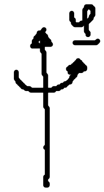
· Bemerkungen:

(i) polare Vektoren $\underline{a}, \frac{d\underline{a}}{dt}$ $\xrightarrow{(7.5)}$ $\underline{\omega}$ ... Pseudovektor

$[\to -\underline{a}, -\frac{d\underline{a}}{dt}$ bei Pkt. spiegelung am Ursprung$]$ $\to \underline{\omega}$ bei Pkt. spiegelung

(ii) $\underline{\omega}_1 + \underline{\omega}_2 = \underline{\omega}_2 + \underline{\omega}_1$ $[$s. (7.5)$]$

(iii) Drehungen $\underline{\underline{D}}(\underline{\varphi})$ $\underline{\varphi} = \varphi \underline{e}$



(1) $\underline{\underline{D}}(\underline{\varphi}_1)\,\underline{\underline{D}}(\underline{\varphi}_2) \neq D(\underline{\varphi}_2)\,D(\underline{\varphi}_1)$

(2) $\underline{\varphi} = d\underline{\varphi}$ mit $|d\underline{\varphi}| \ll 1$

$$\underline{\underline{D}}(d\underline{\varphi})\,\underline{a} = \underline{a} + d\underline{a} \underset{(7.5)}{=} (\underline{\underline{1}} + d\underline{\varphi}\times)\,\underline{a}$$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{\underline{D}}(d\underline{\varphi}) \approx \underline{\underline{1}} + d\underline{\varphi}\times} \quad (7.7)$$

NB: $(d\underline{\varphi}\times)_{ik} = \varepsilon_{ijk}\, d\varphi_j$

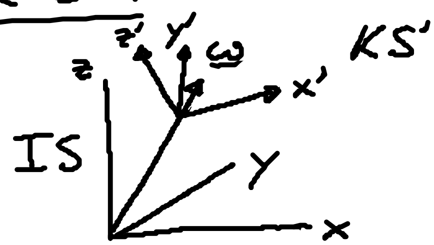
(3) $$\boxed{\underline{\underline{D}}(\underline{\varphi}) = \left(\underline{\underline{1}} + \frac{\underline{\varphi}}{n}\times\right)^n \overset{n\to\infty}{:=} e^{\underline{\varphi}\times} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\underline{\varphi}\times)^n}$$

$(1+\frac{x}{n})^n \overset{n\to\infty}{=} e^x$

$\longrightarrow$ Lie-Gruppen-Darstellung der Drehungen

b) rotierende BS:

· Geometrie:



· Vektor $\underline{a}(t)$: $d\underline{a}_{IS} = d\underline{a}_{KS'} + \underline{\omega}\,dt \times \underline{a}$ (7.9)

$$\frac{7.9}{dt} \longrightarrow \boxed{\left(\frac{d\underline{a}}{dt}\right)_{IS} = \left(\frac{d\underline{a}}{dt}\right)_{KS'} + \underline{\omega}\times\underline{a}} \qquad (7.10)$$

- „Zeitoperator:" $\boxed{\left(\frac{d}{dt}\right)_{IS} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{KS'} + \underline{\omega}\times} \qquad (7.11)$

- gemeinsamer Ursprung von IS und KS': $\underline{r}(t) = \underline{r}'(t)$

aber: $\dot{\underline{r}} := \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{IS} \neq \dot{\underline{r}}' := \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{KS'} \qquad (7.12)$

$\underline{\text{richtig}}$: $\left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{IS} = \left(\frac{d\underline{r}}{dt}\right)_{KS'} + \underline{\omega}\times\underline{r}$!

- $\boxed{\underline{\omega} = \text{konst.}}$ $\underline{r} = \underline{r}'$ $\longrightarrow$ $\ddot{\underline{r}} = \left(\frac{d^2\underline{r}}{dt^2}\right)_{IS} \overset{(7.11)}{=} \left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{KS'} + \underline{\omega}\times\right]\left[\left(\frac{d}{dt}\right)_{KS'} + \underline{\omega}\times\right]\underline{r}$

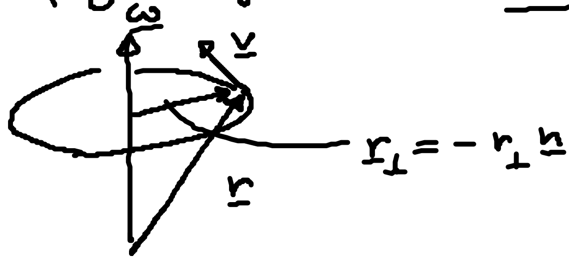
$$= \ddot{\underline{r}}' + \underbrace{2\,\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}' + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r})}_{\underline{b}_0} \qquad (7.13)$$

- IS: $m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}$

$\longrightarrow$ Bew.gl. in KS':

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{\underline{r}}' &= \underline{F} + \underbrace{\underline{F}_s'}_{-m\underline{b}_0} \\ \text{mit } \underline{F}_s' &= \underbrace{-2m\,\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}'}_{\text{Corioliskraft}} \underbrace{- m\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r})}_{\text{Zentrifugalkraft}} \end{aligned}} \qquad (7.14)$$

- Zentrifugalkraft:

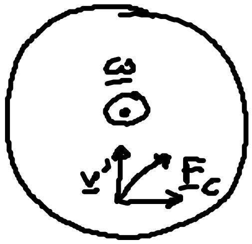


$\longrightarrow -m\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}) = -m\,\underline{\omega}\times\underline{v}$

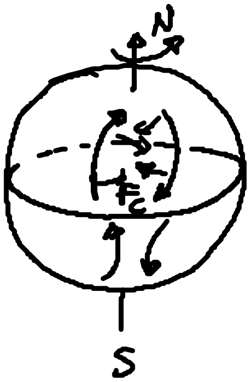
$= m\frac{v^2}{r_\perp}\underbrace{\frac{\underline{r}_\perp}{r_\perp}}_{-\underline{n}}$ $\left[\omega = \frac{v}{r_\perp}\right]$

... Massenkörper wird radial nach außen getrieben

- Corioliskraft: falls $\dot{\underline{r}}' = \underline{v}' \neq \underline{0}$



Erde



Bewegung auf $\left.\begin{matrix}\text{Nord}\\ \text{Süd}\end{matrix}\right\}$ halbkugel: $\left.\begin{matrix}\text{„Rechts"}\\ \text{„Links"}\end{matrix}\right\}$ abweichung

Meterologie:

$\left.\begin{matrix}\text{NO}\\ \text{SO}\end{matrix}\right\}$ Passate: (Winde von Äquator)

Unterspülung des $\left.\begin{matrix}\text{rechten}\\ \text{linken}\end{matrix}\right\}$ Ufer (in Flußrichtung)

II. Newtonsche Mechanik für Vielteilchen-Systeme

- System von N Massepkten
  Zustandsraum: Raum der 3N Ortskoordinaten
- Bsp: Zweikörperproblem (→ Kap. 6, 9)
  Stoßprozesse (→ Kap. 9)
  starre Körper (→ Kap. 10)
  schwingende, gekoppelte (→ Kap. 11)
- mechanische Freiheitsgrade f: beschreiben Lage der N Massepkte eindeutig

$$\boxed{f = 3N - Z}$$

Zahl der Zwangsbedingungen

Bsp:

$f=6$

$f = 6 - 1 = 5$

8. Newtonsche Grundgleichungen & Folgerungen

8.1. Grundgleichungen

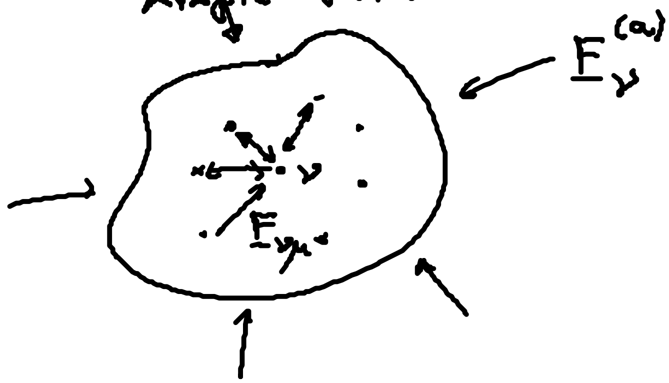
• „Newton" für Massepkte $\nu = 1, \dots, N$:

$$m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu = \frac{d}{dt} \underline{p}_\nu = \underline{F}_\nu$$

$$\text{mit } \boxed{\begin{aligned} \underline{F}_\nu &= \underline{F}_\nu^{(a)} + \underline{F}_\nu^{(i)} \\ &= \underbrace{\underline{F}_\nu^{(a)}}_{\text{äußere Kräfte}} + \underbrace{\sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{N} \underline{F}_{\nu\mu}}_{\text{innere Kräfte}} \end{aligned}} \qquad (8.1)$$

äußere Kräfte

innere Kräfte von allen anderen Massepktn: Zweiteilchenkräfte!



• innere Kräfte: Bsp: Coulomb.. / Gravitations } kräfte

chem. Bindungskräfte (in Molekülen etc)

(i) $\underline{F}_{\nu\mu} = \underbrace{\underline{F}_{\nu\mu}(\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu)}$ ... Kraft von m_μ auf m_ν

Annahme: $\underline{F}_{\nu\mu} \parallel \underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu$ ... Zentralkräfte

(ii) actio = reactio $\longrightarrow$ $\boxed{\underline{F}_{\nu\mu}(\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu) = - \underline{F}_{\mu\nu}(\underline{r}_\mu - \underline{r}_\nu)}$ (8.5)

$$\longrightarrow \boxed{\underline{F}_{\nu\nu} = 0 \longrightarrow \sum_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{N} \underline{F}_{\nu\mu} = \sum_{\mu=1}^{N} \underline{F}_{\nu\mu}}$$

(iii) innere Gesamtkraft.

$$\boxed{\underline{F}^{(i)} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_{\nu}^{(i)} = \sum_{\underbrace{\nu,\mu=1}_{\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{\mu=1}^{N}}}^{N} \underline{F}_{\nu\mu} = 0} \quad (8.6)$$