Klarstellung:

7.2. rotierende BS

IS: $m \ddot{\underline{r}} = \underline{F}$

KS': $m \ddot{\underline{r}}' = \underline{F} + \underline{F}_s'$

$\underline{F}$ .. physikalischer Kraftvektor

Achtung: die Komponenten bezogen auf IS und KS' sind verschieden

$\underline{F}_s'$ ... Scheinkraft!

8. Newtonsche Grundgleichungen & Folgerungen

8.1. Grundgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu &= \frac{d}{dt} \underline{p}_\nu = \underline{F}_\nu \\ \text{mit } \underline{F}_\nu &= \underline{F}_\nu^{(a)} + \underline{F}_\nu^{(i)} = \underline{F}_\nu^{(a)} + \sum_{\mu=1}^{N} \underline{F}_{\nu\mu} \end{aligned}} \quad (8.1)$$

$$, \quad \boxed{\underline{F}_{\nu\mu} = -\underline{F}_{\mu\nu}}$$

8.2. Folgerungen

a) Impulssatz

- Def. Gesamtimpuls $\boxed{\underline{P} = \sum_\nu \underline{p}_\nu = \sum_\nu m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu}$ (8.7)
- $\sum_\nu (8.1)$: $\dot{\underline{P}} = \sum_\nu \dot{\underline{p}}_\nu = \sum_\nu \underline{F}_\nu^{(a)} + \underbrace{\sum_{\nu,\mu} \underline{F}_{\nu\mu}}_{=0 \ [s. (8.6)]}$

$\longrightarrow$ Impulssatz: $\boxed{\dot{\underline{P}} = \sum_\nu \underline{F}_\nu^{(a)} = \underline{F}^{(a)}}$ (8.8)

zeitl. Änderung von $\underline{P}$ = Summe der von außen angreifenden Kräfte

- „abgeschlossenes" System $(\underline{F}^{(a)} = 0)$: $\boxed{\dot{\underline{P}} = 0 \longrightarrow \underline{P} = \text{konst}}$ (8.9)

[Einschub:
äußere Kräfte: Bsp: Schwerkraft der m_ν
Kräfte auf EM-Feld

(i) äußere Gesamtkraft: $\underline{F}^{(a)} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_\nu^{(a)}$ (8.2)

(ii) „abgeschlossenes" System: $\underline{F}^{(a)} = 0$ (8.3)

im engeren Sinn: $\underline{F}_\nu^{(a)} = 0$]

b) <u>Schwerpkt.satz = Impulsatz</u>:

- <u>Def.</u>: Schwerpkts. Koordinate:

$$\boxed{\underline{R} = \frac{\sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \underline{r}_\nu}{M} \quad \text{mit } M = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ \ldots \text{ Gesamtmasse}} \qquad (8.10)$$

… „Mittelpkt" der trägen ($\hat{=}$ schweren) Masse

NB: unabh. von Wahl des KS: $\underline{r}_\nu = \underline{r}_\nu' + \underline{d} \xrightarrow{\text{in (8.10)}} \underline{R} = \underline{R}' + \underline{d}$

- <u>Schwerpkt. satz</u>:

$$\dot{\underline{P}} = \sum_{\nu=1}^{N} m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu \underset{(8.10)}{=} M \ddot{\underline{R}} \quad \text{in (8.8)}$$

$\longrightarrow$ $M\ddot{\underline{R}} = \underline{F}^{(a)}$ (8.11)

Der Schwerpkt. bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse M in ihm vereinigt sei und alle (äußeren) Kräfte an ihm angreifen

Bem.: (i) keine $\underline{F}_{\nu\mu}$ in (8.11) $\longrightarrow$ „Man kann sich nicht am eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen" (Münchhausen)

(ii) realer Körper (aus $\sum m_\nu$) $\underset{\text{verhält sich wie}}{\equiv}$ Massepkt $(M, \underline{R})$ & innere Bewegung

c) Drehimpulssatz

· Def.

$$\boxed{\text{Gesamtdrehimpuls} \quad \underline{L} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{L}_\nu \quad \text{mit } \underline{L}_\nu = m\,\underline{r}_\nu \times \dot{\underline{r}}_\nu = \underline{r}_\nu \times \underline{p}_\nu} \qquad (8.12)$$

Bem.: bezogen auf Ursprung des KS!

· Herleitung:

$\sum_\nu \underline{r}_\nu \times \underbrace{(8.1)}_{m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu = \underline{F}_\nu}$: l.S. $\sum_\nu m_\nu \underline{r}_\nu \times \ddot{\underline{r}}_\nu = \sum_\nu m_\nu \left[\frac{d}{dt}(\underline{r}_\nu \times \dot{\underline{r}}_\nu) - \underbrace{\dot{\underline{r}}_\nu \times \dot{\underline{r}}_\nu}_{=0}\right] \overset{(8.12)}{=} \dot{\underline{L}}$

r.S.: $\underline{D} = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{r}_\nu \times \underline{F}_\nu^{(a)} + \underbrace{\sum_{\nu,\mu=1}^{N} \underline{r}_\nu \times \underline{F}_{\nu\mu}}$

$\sum_\nu \underline{r}_\nu \times \underline{F}_\nu$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} \left(\underline{r}_\nu \times \underline{F}_{\nu\mu} + \underline{r}_\mu \times \underbrace{\underline{F}_{\mu\nu}}_{-\underline{F}_{\nu\mu}}\right)$$

... actio = reactio

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} (\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu) \times \underline{F}_{\nu\mu}$$

$$= 0, \quad \text{falls } \underline{F}_{\nu\mu} \parallel \underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu$$

$$\boxed{\text{Zentralkräfte } \underline{F}_{\nu\mu} \longrightarrow \text{Gesamtdrehmoment der inneren Kräfte: } \underline{D}^{(i)} = \sum_{\nu,\mu=1}^{N} \underline{r}_\nu \times \underline{F}_{\nu\mu} = 0} \qquad (8.13)$$

$\longrightarrow$ Drehimpulssatz:

$$\boxed{\frac{d\underline{L}}{dt} = \underline{D} \quad \text{mit } \underline{D} = \sum_\nu \underline{r}_\nu \times \underline{F}_\nu^{(a)}} \qquad (8.14)$$

... Gesamtdrehmoment der äußeren Kräfte

- Drehimpulserhaltung:

$$\boxed{\underline{D}=0 \longrightarrow \dot{\underline{L}}=0 \longrightarrow \underline{L}=\text{konst.}} \quad (8.15)$$

Bsp: abgeschlossenes System (im engeren Sinne): $\underline{F}_\nu^{(a)}=0$!

d) <u>Energiesatz</u>

- <u>Annahme</u>: konservative Kräfte $\longrightarrow$ Potentiale existieren

äußere Kräfte: $\underline{F}_\nu^{(a)} = -\underset{\text{bzgl. } \underline{r}_\nu}{\text{grad}_\nu} U^{(a)}$ mit $U^{(a)} = \sum_{\nu=1}^{N} U_\nu^{(a)}(\underline{r}_\nu)$ (8.16)

innere Kräfte: $\underline{F}_{\nu\mu} = -\text{grad}_\nu U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|)$ (8.17) $[U_{\nu\mu} = U_{\mu\nu}\,!!]$

$$= -\underline{F}_{\mu\nu} = +\text{grad}_\mu U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|)$$

Sprechweise: $U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|)$ ... Wechselwirkungspotential für Teilchen ν und μ

- Energieerhaltungssatz (EES):

$$\sum_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \Big| \; m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu = \underline{F}_\nu^{(a)} + \sum_\mu \underline{F}_{\nu\mu}$$

(i) l.S.: $\sum_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot m_\nu \ddot{\underline{r}}_\nu = \frac{d}{dt}\sum_\nu \frac{m_\nu}{2}\dot{\underline{r}}_\nu^2 = \frac{d}{dt} T$

<u>Def:</u> <u>kinet. Gesamtenergie</u>: $\boxed{T = \sum_\nu \frac{m_\nu}{2}\dot{\underline{r}}_\nu^2}$ (8.18)

(ii) r.S.: äußere Kräfte:

$$\sum_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \underline{F}_\nu^{(a)} \overset{(8.16)}{=} -\sum_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \text{grad}_\nu U_\nu^{(a)} = -\frac{d}{dt} U^{(a)}$$

<u>Def.</u> <u>Ges. pot. Energie im äußeren Kraftfeld</u> $\boxed{U^{(a)} = \sum_\nu U_\nu^{(a)}(\underline{r}_\nu)}$ (8.19)

(iii) r.S.: innere Kräfte:

$$\sum_{\nu\mu} \dot{\underline{r}}_\nu \cdot \underline{F}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} \left(\dot{\underline{r}}_\nu \cdot \underline{F}_{\nu\mu} + \dot{\underline{r}}_\mu \cdot \underline{F}_{\mu\nu} \right)$$

$$\overset{(8.17)}{=} -\frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} \left[\dot{\underline{r}}_\nu \cdot \mathrm{grad}_\nu\, U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|) + \dot{\underline{r}}_\mu \cdot \mathrm{grad}_\mu\, U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|) \right]$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} \frac{d}{dt} U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|) = -\frac{d}{dt} U^{(i)}$$

Def: Ges. Ww.energie im System:

$$\boxed{U^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu} U_{\nu\mu}(|\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu|)} \qquad (8.20)$$

(i) & (ii) & (iii) $\longrightarrow$

$$\frac{d}{dt}\left(T + U^{(a)} + U^{(i)}\right) = 0 \qquad (8.21)$$

$\longrightarrow$ EES bei konservativen Kräften:

$$\boxed{T + U^{(a)} + U^{(i)} = E} \qquad (8.22)$$

„Gesamtenergie"

- mit dissipativen Kräften: $\underline{F}_{\nu,\mathrm{diss}}$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\left[T + U^{(a)} + U^{(i)}\right] = \sum_{\nu=1}^{N} \underline{F}_{\nu,\mathrm{diss}} \cdot \dot{\underline{r}}_\nu} \qquad (8.23)$$

- Arbeit am System: von Zustand $(1) = \{\underline{r}_\nu(t_1)\}$ nach $(2) = \{\underline{r}_\nu(t_2)\}$

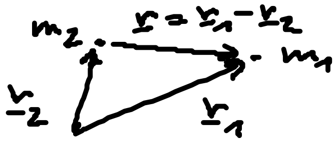
$$\boxed{A_{12} = \sum_\nu \int \underline{F}_\nu \cdot d\underline{r}_\nu = \sum_\nu \int \underline{F}_\nu \cdot \dot{\underline{r}}_\nu \, dt} \qquad (8.24)$$

$$\sum_\nu \underline{F}_\nu \cdot \dot{\underline{r}}_\nu = \frac{d}{dt} T \quad \longrightarrow \quad \boxed{T(2) - T(1) = A_{12}} \qquad (8.25)$$

- konservatives System:

$$\xrightarrow[(8.20)]{(8.19)\ \&} \quad \boxed{A_{12} = -\left[U^{(a)}(2) + U^{(i)}(2) - U^{(a)}(1) - U^{(i)}(1)\right]} \qquad (8.26)$$

9. Das Zweikörper-Problem



Kräfte: $\underline{F}_{12} = -\underline{F}_{21}(\underline{r})$

$\underline{F}_1^{(a)}(\underline{r}_1)$, $\underline{F}_2^{(a)}(\underline{r}_2)$

a) Grundgleichungen

- Newton:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \ddot{\underline{r}}_1 &= \underline{F}_1^{(a)} + \underline{F}_{12} \quad (1) \\ m_2 \ddot{\underline{r}}_2 &= \underline{F}_2^{(a)} - \underline{F}_{12} \quad (2) \end{aligned}\right. \qquad (9.1)$$

- Rel. und Schwerpkts. bewegung

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{r}_1 - \underline{r}_2 \\ \underline{R} &= \frac{m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2}{M = m_1 + m_2} \end{aligned}} \; (9.2) \Bigg\} \longleftrightarrow \Bigg\{ \boxed{\begin{aligned} \underline{r}_1 &= \underline{R} + \frac{m_2}{M}\underline{r} \\ \underline{r}_2 &= \underline{R} - \frac{m_1}{M}\underline{r} \end{aligned}} \; (9.3)$$

$$\left.\begin{aligned} &(9.1)\ (1)+(2): & M\ddot{\underline{R}} &= \underline{F}_1^{(a)}(\underline{r}_1) + \underline{F}_2^{(a)}(\underline{r}_2) \\ &\frac{(1)}{m_1} - \frac{(2)}{m_2}: & \ddot{\underline{r}} &= \frac{1}{m_1}\underline{F}_1^{(a)} - \frac{1}{m_2}\underline{F}_2^{(a)} + \frac{1}{\mu}\underline{F}_{12}(r) \end{aligned}\right\} (9.4)$$

$$\boxed{\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \longrightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{... reduz. Masse}} \; (9.5)$$

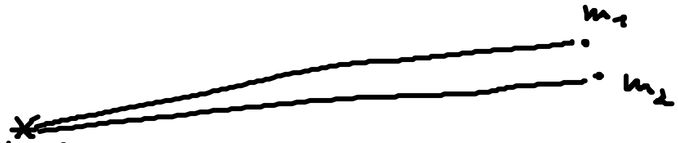
- „Entkoppeln" der Bew.gl. (9.4):

$$\xrightarrow{!} \boxed{\frac{\underline{F}_1^{(a)}}{m_1} = \frac{\underline{F}_2^{(a)}}{m_2}} \; (9.6)$$

Bsp: $\underline{F}_i^{(a)} = -\underline{\nabla}_i U^{(a)}(\underline{r}_i)$

mit $|\underline{r}| \ll \underbrace{\frac{U^{(a)}(\underline{r}_i)}{|\underline{\nabla}_i U^{(a)}(\underline{r}_i)|}}_{\text{Längenskala auf der } U^{(a)} \text{ variiert}}$

Gravitation: z.B. Erdoberfläche



Zentralmasse erzeugt $U^{(a)}$

$$\Longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \underline{F}_1^{(a)} &= m_1 \underline{g} \\ \underline{F}_2^{(a)} &= m_2 \underline{g} \end{aligned}}$$

$$\xrightarrow{(9.4)} \boxed{\begin{aligned} \ddot{\underline{R}} &= \underline{g} \\ \mu \ddot{\underline{r}} &= \underline{F}_{12}(\underline{r}) \end{aligned}} \qquad (9.8)$$

[$\longrightarrow$ vgl. Kap. 6 Bew. im Zentralfeld]