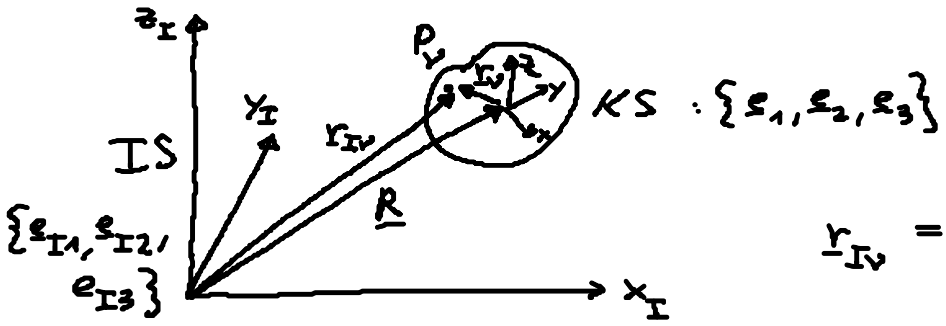
10.1. Kinematik

a) Koord. systeme:



$$\underline{r}_{I\nu} = \underline{R} + \underline{r}_\nu \quad (10.3)$$

b) Eulerscher Satz

Jede Bewegung des starren Körpers läßt sich zu jedem Zeitpkt. zerlegen in eine Translation des Aufpkts $\underline{R}(t)$ und eine Rotation um eine momentane Drehachse $\underline{\omega}(t)$ durch den Aufpkt.

$$\dot{\underline{r}}_{I\nu}(t) = \dot{\underline{R}}(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{r}_\nu(t) \quad \forall P_\nu \quad (10.4)$$

Beweis:

(i) $d\,\underline{r}_{I\nu}(t) \overset{(10.3)}{=} d\underline{R}(t) + d\underline{r}_\nu(t) \quad (*)$

starrer Körper: $|\underline{r}_\nu| = \text{konst.} \ \forall t \longrightarrow d\underline{r}_\nu \perp \underline{r}_\nu$

$\xrightarrow[(7.5)]{} d\underline{r}_\nu = d\varphi\, \underline{e}_\omega \times \underline{r}_\nu$

mit $\underline{\omega}_\nu = \frac{d\varphi}{dt} \underline{e}_\omega$ & $\frac{(*)}{dt}$: $\dot{\underline{r}}_{I\nu}(t) = \dot{\underline{R}}(t) + \underline{\omega}_\nu \times \underline{r}_\nu$

(ii) $\underline{\omega} = \underline{\omega}_\nu = \underline{\omega}_\mu$?

Rel. geschw. $\dot{\underline{r}}_{I\nu} - \dot{\underline{r}}_{I\mu} \overset{(10.3)}{=} \dot{\underline{r}}_\nu - \dot{\underline{r}}_\mu$

$= \underline{\omega}_\nu \times \underline{r}_\nu - \underline{\omega}_\mu \times \underline{r}_\mu \perp \underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu$

nur mit $\omega_\nu = \omega_\mu = \omega$

$\longrightarrow \quad \dot{\underline{r}}_\nu - \dot{\underline{r}}_\mu = \underline{\omega} \times (\underline{r}_\nu - \underline{r}_\mu)$ qed

- Satz: $\boxed{\underline{\omega} \text{ ist unabh. von Wahl von } \underline{R}}$ (10.5)

Beweis: Übungen?

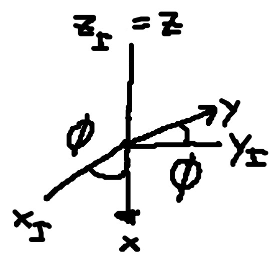
c) Eulersche Winkel:

- Lage des starren Körpers:
  (i) $\underline{R} \longrightarrow$ 3 Koord.
  (ii) Orientierung von KS relativ zu IS:
  $\longrightarrow$ Eulersche Winkel

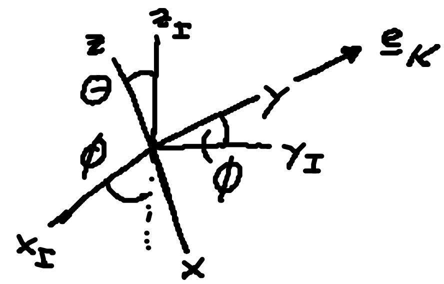
$\longrightarrow f = 6$!

- Starte mit IS = KS:

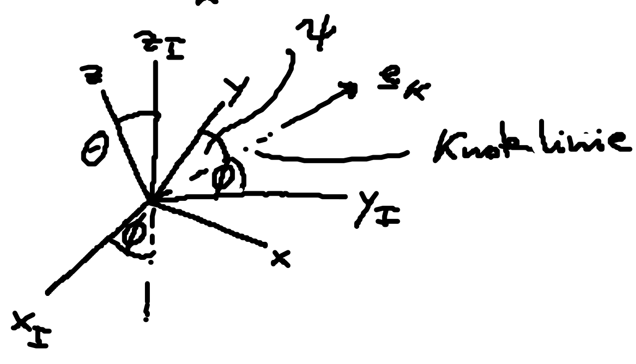
ϕ: Rot. um $z_I = z$-Achse:



Θ: Rot. um momentane y-Achse:



ψ: Rot. um z-Achse:



- von $\underline{\omega}$ zu ϕ, Θ, ψ: [vgl. von $\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} \longrightarrow \underline{r}$]

[s. Kopie]

10.2 Dynamik des starren Körpers (I) & Trägheitstensor

a) <u>Dynam. Grundgleichungen</u>:

- starrer Körper ≡ Spezialfall eines Vielteilchen-System
- innere Kräfte:

$$\underline{F}_{\nu\mu} = -\underline{F}_{\mu\nu} \longrightarrow \underline{F}^{(i)} = \sum_{\nu\mu} \underline{F}_{\nu\mu} = 0 \quad (8.6)$$ ... „Münchhausen"!

$$\underline{F}_{\nu\mu} \parallel \underline{r}_{I\nu} - \underline{r}_{I\mu} \longrightarrow \underline{D}^{(i)} = \sum_{\nu\mu} \underline{r}_{I\nu} \times F_{\nu\mu} = 0 \quad (8.7)$$

... "<u>keine</u> spontane Rotation"

starrer Körper: (i) $\underline{F}^{(i)} = 0 = \underline{D}^{(i)}$!

(ii) innere Kräfte → Starrheit

- Kontinuumslimes:

diskrete Massenpkte m_ν ⟶ kont. Massenverteilung: $dm = \rho(\underline{r})\, d^3r$

Massendichte: $\rho(\underline{r}) = \dfrac{dm}{dV = d^3r}$

$$\sum_\nu m_\nu \ldots \longrightarrow \int d^3r\, \rho(\underline{r}) \ldots \quad (10.9)$$

⟶ $10^4 - 10^6$ Atome in dV

<u>Bsp.</u> (1) Gesamtmasse: $M = \sum_\nu m_\nu \longrightarrow \int d^3r\, \rho(\underline{r})$ (10.10.)

(2) " impuls: $\underline{P} = \sum_\nu m_\nu \dot{\underline{r}}_{I\nu} \longrightarrow \int d^3r_I\, \rho(r_I)\, \underline{v}(r_I)$ (10.11)

(3) " drehimpuls: $\underbrace{\underline{L}_I = \sum_\nu m_\nu \underline{r}_{I\nu} \times \dot{\underline{r}}_{I\nu}}_{\text{im folgenden!!}} \longrightarrow \int d^3r\, \rho(\underline{r}_I)\, \underline{r}_I \times \underline{v}(\underline{r}_I)$ (10.12)

- Bewegungsgln:

$$\dot{\underline{P}} = \sum_\nu \underline{F}_\nu^{(a)} = \underline{F}^{(a)} \quad (10.13) \quad [(8.8)]$$

$$\dot{\underline{L}}_I = \sum_\nu \underline{r}_{I\nu} \times \underline{F}_\nu^{(a)} = \sum_\nu \underline{D}_\nu^{(a)} = \underline{D}^{(a)} \quad (10.14) \quad [(8.14)]$$

... 6 Dgl., die die Dynamik des starren Körpers ($f=6$) <u>eindeutig</u> bestimmen.

• Gleichgewichtsbed.: $\left.\begin{array}{l}\underline{F}^{(a)}=0\\ \underline{D}^{(a)}=0\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\dot{\underline{P}}=0\\ \dot{\underline{L}}_I=0\end{array}\right.$ $\longrightarrow$ Grundlage der Statik!

• im folgenden: 2 Fälle:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{(i) Aufpkt. } \underline{R} = \text{Schwerpkt } \underline{R}_s = \dfrac{\sum_\nu m_\nu \underline{r}_{I\nu}}{M}\\ \qquad \text{Bsp: Erde, freifallender Kreisel}\\ \text{(ii) } \underline{R} \text{ mit } \dot{\underline{R}}=0\\ \qquad \text{Bsp. Kreisel mit festem Auflagepkt.}\end{array}}$$

Folgerungen mit (10.4): $\dot{\underline{r}}_{I\nu}(t) = \dot{\underline{R}}(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{r}_\nu(t)$

b) Impuls:

(i) $\underline{R} = \underline{R}_s$: $\underline{P} = \sum_\nu m_\nu \dot{\underline{r}}_\nu \overset{(10.4)}{=} M \dot{\underline{R}}_s + \underline{\omega} \times \underbrace{\sum_\nu m_\nu \underline{r}_\nu}_{=0,\ \underline{R}=\underline{R}_s\,!}$

$\longrightarrow \boxed{\underline{P} = M \dot{\underline{R}}_s}$ (10.16)

(ii) $\dot{\underline{R}}=0$: $\boxed{\underline{P} = \underline{\omega} \times \sum_\nu m_\nu \underline{r}_\nu = \underline{\omega} \times M \underline{r}_s}$ (10.17)

c) Drehimpuls

$$\underline{L}_I = \sum_\nu m_\nu \underbrace{\underline{r}_{I\nu}}_{\underline{R}+\underline{r}_\nu} \times \underbrace{\dot{\underline{r}}_{I\nu}}_{=\dot{\underline{R}}+\underline{\omega}\times\underline{r}_\nu} \quad (*)$$

(i) $\underline{R} = \underline{R}_s$:

$\sum_\nu m_\nu \underline{r}_\nu = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} &\underline{L}_I = \underline{L}_s + \underline{L} && (10.18)\\ &\text{mit } \underline{L}_s = M\underline{R}_s \times \dot{\underline{R}}_s \overset{(10.16)}{=} \underline{R}_s \times \underline{P} && (10.19)\\ &\underline{L} = \sum_\nu m_\nu \underline{r}_\nu \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_\nu) && (10.20)\end{aligned}}$$

$\underline{L}_I$ ... Drehimpuls bzgl. Ursprung von IS

$= \underline{L}_s$ ... " des Schwerpkts. "

$+ \underline{L}$ ... " des starren Körpers bzgl. Aufpkt. $= \underline{R}_s$

(ii) $\dot{\underline{R}} = 0$: $\xrightarrow[(*)]{}$ $\underline{L}_I = \underline{R} \times \underbrace{(\underline{\omega} \times \underbrace{\sum_\nu m_\nu \underline{r}_\nu}_{M\underline{r}_s})}_{\underline{P}\ [\text{s. } (10.17)]} + \underbrace{\underline{L}}_{(10.20)}$

$\longrightarrow$ $\boxed{\underline{L}_I = \underline{L}_s + \underline{L} = \underline{R} \times \underline{P} + \underline{L}}$ (10.21) wie (10.18) – (10.20)

mit $\underline{L}$ bzgl. $\underline{R}$!

d) Trägheitstensor: Umschreibung von (10.20)

· Hilfsformel: $\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{a}) = |\underline{a}|^2 \underline{b} - \underline{a}\,(\underline{a} \cdot \underline{b})$

$= |\underline{a}|^2 \underline{b} - (\underline{a} \otimes \underline{a})\,\underline{b}$

$\underline{a} \times (\underline{b} \times \underline{c}) = \underline{b}\,(\underline{a} \cdot \underline{c}) - \underline{c}\,(\underline{a} \cdot \underline{b})$

$= (|\underline{a}|^2 \underline{\underline{1}} - \underline{a} \otimes \underline{a})\,\underline{b}$ (10.22)

[NB: $\underline{u} \otimes \underline{v}$ ... dyadisches Produkt von $\underline{u}, \underline{v}$; spezieller Tensor 2. Stufe

$(\underline{u} \otimes \underline{v})\,\underline{b} = \underline{u}\,(\underline{v} \cdot \underline{b})$ (10.23)

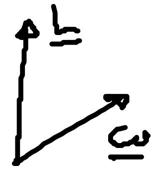
· Drehimpuls $\underline{L}$: (10.20) mit (10.22) ($\underline{\omega} = \underline{b}$, $\underline{a} = \underline{r}_\nu$) (10.24)

$$\boxed{\underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{\omega} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{\Theta}}(t) = \sum_\nu m_\nu \left[|\underline{r}_\nu|^2 \underline{\underline{1}} - \underline{r}_\nu(t) \otimes \underline{r}_\nu(t) \right]}$$

.. Trägheitstensor in Koord. unabh. Form

(i) $\underline{\underline{\Theta}}$ ... Eigenschaft des starren Körpers

(ii) lin. Abb.:



• Komponentendarstellung: bzgl. ONB $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$

$$\underline{e}_i \cdot \Big| \underline{L} = \underline{\underline{\Theta}}\,\underbrace{\underline{\omega}}_{=\omega_j \underline{e}_j} \longrightarrow L_i = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{e}_j\,\omega_j$$

$$\longrightarrow \boxed{L_i = \Theta_{ij}\,\omega_j \text{ mit } \Theta_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{\underline{\Theta}}\,\underline{e}_j = \sum_\nu m_\nu \left[|\underline{r}_\nu^2|\,\delta_{ij} - x_{\nu i} x_{\nu j} \right]} \quad (10.25)$$

Matrix $\underline{\underline{\Theta}}$ mit $[\Theta]_{ij} = \Theta_{ij}$!! $x_{\nu i} = \underline{e}_i \cdot \underline{r}_\nu$

[Bsp. s. Übungen]