b) generalisiertes / geschwindigkeitsabhängiges Potential W:

- Annahme:

$$\boxed{\begin{gathered} W = W(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) \\ \text{mit } Q_j = -\frac{\partial W}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} \end{gathered}}$$

existiert (12.31)

(12.26)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \\ L = T - W \end{gathered}} \qquad (12.32)$$

- Bsp: geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld
  - Lorentzkraft:

$$\underline{F} = q\,(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \qquad (12.33)$$

Ladung, elektr. Feld, Geschw $\dot{\underline{r}}$, Magnetfeld

  - o.B.:

$$\boxed{\begin{gathered} \underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A} \\ \underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} \\ \varphi(\underline{r},t) \ \dots \ \text{skalare Potential} \\ \underline{A}(\underline{r},t) \ \dots \ \text{Vektor "} \end{gathered}} \qquad (12.34)$$

$$\xrightarrow[\text{in (12.33)}]{(12.34)} \underline{F} = q\left[-\underline{\nabla}\varphi - \underline{\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}} + \underline{v}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A})\right] \qquad \underline{v} = \underline{v}(t) \longrightarrow \frac{\partial \underline{v}}{\partial x_i} = 0$$

$$\text{(i)}\quad \underline{v}\times(\underline{\nabla}\times\underline{A}) = \underline{\nabla}(\underline{v}\cdot\underline{A}) - \underline{(\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{A}}$$

$$\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = \underline{b}(\underline{a}\cdot\underline{c}) - \underline{c}(\underline{a}\cdot\underline{b})$$

$$\text{(ii)}\quad \underline{\frac{\partial}{\partial t}\underline{A} + (\underline{v}\cdot\underline{\nabla})\underline{A}} = \frac{\partial}{\partial t}\underline{A} + \left(\dot{x}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \dot{x}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \dot{x}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\underline{A}$$

$$\overset{!}{=} \frac{d}{dt}\underline{A}$$ .. Änderungen, die Teilchen von $\underline{A}(\underline{x}(t),t)$ sieht!

$$\longrightarrow \underline{F} = q\left[-\underline{\nabla}\varphi - \frac{d}{dt}\underline{A} + \underline{\nabla}(\underline{v}\cdot\underline{A})\right] \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial v_i} = 0!$$

$$\longrightarrow F_i = q\left[-\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi - \underline{v}\cdot\underline{A}) - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial v_i}(\underline{A}\cdot\underline{v} - \varphi)\right]$$

$$\xrightarrow{v_i = \dot{x}_i} \boxed{\begin{array}{l} F_i = -\dfrac{\partial W}{\partial x_i} + \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial W}{\partial \dot{x}_i} \\ \text{mit } W = q(\varphi - \underline{A}\cdot\dot{\underline{r}}) \end{array}} \quad (12.35)$$

also $$\boxed{L = T - q\varphi + q\,\underline{A}\cdot\dot{\underline{r}}} \quad (12.36)$$

c) Reibungskräfte

- Aufteilung der Kräfte: $\underline{F}_i^{(t)} = \text{kons. Kraft} + \text{Rest}$

  $\hookrightarrow L = T - U$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j} \quad (12.37)$$

- Reibungskraft:

  linearer Ansatz: $F_{i\alpha}^{(R)} = -\gamma_{\alpha\beta}^{(i)}\,\dot{x}_{i\beta}$ $\qquad \alpha,\beta = 1,2,3$

  Bsp: Stokessche Reibung für Kugel: $\gamma_{\alpha\beta}^{(i)} = \gamma\,\delta_{\alpha\beta}$

  $$\longrightarrow F_{i\alpha}^{(R)} = -\gamma\,\dot{x}_{i\alpha}$$

$\underline{F}_i^{(R)} \parallel \dot{\underline{r}}_i$

- Rayleighsche Dissipationsfkt.

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_i \gamma_{\alpha\beta}^{(i)} \dot{x}_{i\alpha} \dot{x}_{i\beta} \,, \quad \gamma_{\alpha\beta}^{(i)} = \gamma_{\beta\alpha}^{(i)}} \qquad (12.39)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{F_{i\alpha}^{(R)} = -\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} = -\gamma_{\alpha\beta}^{(i)} \dot{x}_{i\beta}} \qquad (12.40)$$

Bsp.: $\gamma_{\alpha\beta}^{(i)} = \gamma\,\delta_{\alpha\beta}$ $\quad W = \frac{1}{2}\sum_i \gamma \underbrace{\dot{x}_{i\alpha}^2}_{\underline{v}_i^2}$ $\quad F_{i\alpha}^{(R)} = -\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} = -\gamma \dot{x}_{i\alpha}$ ✓

- physikal. Interpretation:

$$-\sum_i \underline{F}_i^{(R)} \cdot \dot{\underline{r}}_i \overset{(12.40)}{=} \sum_i \dot{x}_{i\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^{(i)} \dot{x}_{i\beta} \overset{(12.39)}{=} 2W$$

$$\boxed{2W \ \ldots \ \text{die von den Reibungskräften dissipierte Leistung}} \qquad (12.41)$$

- generalisierte Kräfte:

$$Q_j \overset{(12.25)}{=} \sum_i \underline{F}_i^{(R)} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \overset{(12.40)}{=} -\sum_i \frac{\partial W}{\partial \dot{x}_{i\alpha}} \underbrace{\frac{\partial x_{i\alpha}}{\partial q_j}}_{=\frac{\partial \dot{x}_{i\alpha}}{\partial \dot{q}_j}} \quad \text{[vgl. (12.22)]}$$

$$\boxed{Q_j = -\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}} \qquad (12.42)$$

„generalisierte Geschw."

- Euler-Lagrangesche Gln.:

$$(12.37) \longrightarrow \quad \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \underbrace{\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}}_{\text{„Reibung"}} = 0} \qquad (12.43)$$

[Forschg.: A. Ulfan & H.S. Phys. Rev. Lett. 103, 159801 (2009)]

13. Das Hamiltonsche Prinzip

- bisher: d'Alembertsches Prinzip $\sum_i (\underline{F}_i^{(t)} - m_i \ddot{\underline{r}}_i) \cdot \delta \underline{r}_i = 0$

  $\longrightarrow$ Differentialprinzip: $\delta \underline{r}_i$ zur Zeit t
- jetzt: Integralprinzip: virtuelle Verschiebung der gesamten Bahn & Extremalprinzip

  $\underbrace{\hphantom{\text{Integralprinzip \& Extremalprinzip}}}$

  Mechanik, Elektromagnetismus, komplexe Materialien, Rel. theorie, fundamentale Ww der Natur

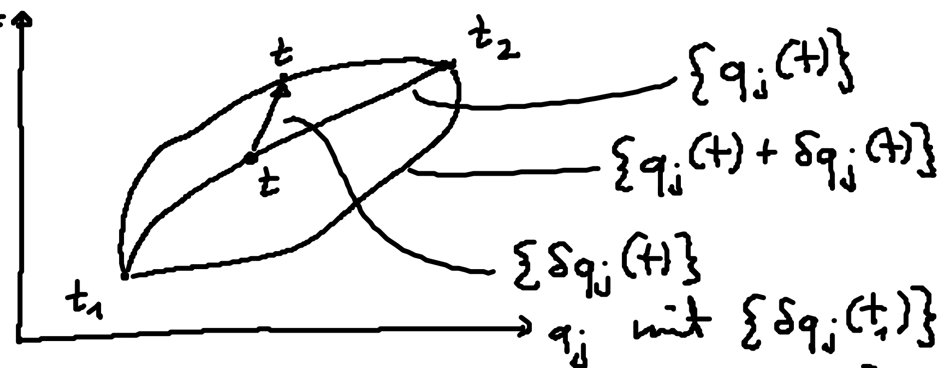
13.1 Hamiltonsches Prinzip („der kleinsten Wirkung")

- mechan. System: f generalisierte, voneinander unabhängige Koord.

$$q_1(t) \dots q_f(t) = \{q_j(t)\} \quad (13.1)$$

- physikal. / virtuelle Bahnen:

  2D-Schnitt des Konfigurationsraumes



mit $\{\delta q_j(t_1)\} = \{\delta q_j(t_2)\} = 0$

- Hamiltonsches Prinzip:

> Die physikal. Bahn eines Systems zwischen $\{q_j(t_1)\}$ und $\{q_j(t_2)\}$ im Konfigurationsraum ist durch ein Extremum der Wirkung $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)\, dt$ (13.2)
> ausgezeichnet: $\delta S = 0$
> „Variation von S"

$\boxed{L \text{ heißt Lagrange-Fktn.}}$

Bem.: (i) δS = Änderung von S bei $\{q_j(t)\}$
$\longrightarrow \{q_j(t) + \delta q_j(t)\}$

(ii) Extremum: $\delta S = 0$
Minimum oder Maximum!

(iii) Einheit von S: Energie × Zeit

• konservative Kräfte / generalisiertes Potential U:

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j}$$

Beh.:

$$\boxed{\begin{array}{l} L = T - U \\ \delta S = 0 \longrightarrow \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \end{array}} \qquad (13.3)$$

... Lagrangesche Gln. (2. Art) [vgl. (12.29), (12.32)]

Beweis: Kap. 13.3

• fundamentale Ww in der Natur:

1. Gravitation
2. EM-Ww
3. schwache Ww (Neutrinos)
4. Starke Ww (Kernkräfte

} herleitbar über Hamiltonsches Prinzip + L

13.2 Eulersche Variationsrechnung

• 1D-Fall: Variationsproblem

Geg: Funktion $y(x)$
Funktional $F[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, \underset{\frac{dy}{dx}}{y'}, x)\, dx$ (13.4)

... ordnet $y(x)$ eine Zahl zu!

Ges: $y(x)$, so daß $F[y(x)]$ extremal für feste $y(x_1), y(x_2)$