13.3 Euler-Lagrangesche Gln. 2. Art

- Herleitung aus Hamiltonschen Prinzip

a) kons. Kräfte / generalisiertes Potential:

- Lagrangesche Fkt.: $L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = T - U$
- Wirkung: $S = \int_{t_1}^{t_2} L(\ldots)\, dt$
- Variation: $\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta L(\ldots.)\, dt = 0$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \overbrace{\left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right]}^{\frac{\delta S}{\delta q_j(t)}} \delta q_j(t)\, dt = 0$$

$$\xrightarrow[\text{voneinander}]{\delta q_j \text{ unabh.}} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad (13.3)$$

qed

b) nichtkonservative Kräfte:

- L existiert nicht, stattdessen: (Sommerfeld!)

$$\boxed{\begin{gathered}\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A)\, dt = 0 \\ \text{mit } \underbrace{\delta A}_{\ldots \text{ virtuelle Arbeit}} = \sum_i \underline{F}_i^{(t)} \cdot \delta \underline{r}_i = \underline{\sum_j Q_j\, \delta q_j}\end{gathered}} \qquad (13.19) \quad [\text{vgl. } (12.24)]$$

$$\delta \underline{r}_i = \sum_j \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}\, \delta q_j$$

$$Q_j = \sum_i \underline{F}_i^{(t)} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j}$$

- Ausführung der Variation:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T + \delta A)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_j \left[\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} + Q_j \right] \delta q_j \, dt \overset{!}{=} 0$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad , \; j = 1 \dots f} \qquad (12.26)!$$

- Vorsicht: Goldstein / Nolting

$$\cancel{L = T - W \quad \text{mit } W = \sum_i \underline{F}_i \cdot \underline{r}_i}$$

„Arbeit ist keine Zustandgröße, hängt vom Weg ab"
(s. Sommerfeld)

c) Potentialkräfte mit anholonome Zwangsbed.

- also: $L = T - U$,

$$\text{mit } \sum_{j=1}^{f} \phi_j^{(\nu)} \delta q_j = 0 , \quad \nu = 1, \dots, z \qquad (13.20)$$

- Variation:

$$\delta S = \int \sum_j \underbrace{\frac{\delta S}{\delta q_j}}_{\text{wie in a)}} \delta q_j \quad dt = 0$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{z} \lambda_\nu \sum_{j=1}^{f} \phi_j^{(\nu)} \delta q_j$$

$$= \int \sum_j \left(\frac{\delta S}{\delta q_j} + \sum_{\nu=1}^{z} \lambda_\nu \phi_j^{(\nu)} \right) \delta q_j \, dt = 0$$

Argumentation wie in Kap. 12.4

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \underbrace{\sum_{\nu=1}^{z} \lambda_\nu \phi_j^{(\nu)}}_{\text{Zwangskräfte [vgl. (12.21)]}} \quad , \; j = 1, 2, \dots f} \qquad (13.21)$$

… Lagrangesche Gln. gemischter Art

$$\boxed{\sum_{j=1}^{f} \phi_j^{(\nu)} \dot q_j = 0 \quad , \; \nu = 1, \dots z} \qquad (13.22)$$

also: $f+Z$ DGln. für $f+Z$ Variable q_j, λ_ν

13.4. generalisierte Impulse

· **Def:** $$\boxed{p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}} \quad (13.23)$$

... generalisierter / kanonischer / zu q_j konjugierter } Impuls

· **Bsp:**

(i) Teilchen im 3D Potential: $q_j = x_j$, $j = 1,2,3$ ... kartes. Koord.

$$\left.\begin{aligned} T &= \frac{m}{2}\sum_j \dot{x}_j^2 \\ U &= U(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}\right\} L = T - U \longrightarrow \boxed{p_j = m\dot{x}_j} \quad (13.24)$$

(ii) Teilchen im em-Feld:

$$L = T - W = T - \underset{\text{Ladung}}{q}\,\underset{\text{skalares}}{\varphi} + q \sum_i \underset{\text{Vektor}}{A_i}\,\dot{x}_i \quad (12.36)$$

Potential

$$\xrightarrow{(13.23)} \boxed{p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \underbrace{m\dot{x}_i}_{\text{mechan. Impuls}} + \underbrace{q A_i}_{\text{Impuls des mitgeführten em. Feldes}}} \quad (13.25)$$

NB: viele Teilchen mit holonomen Zwangsbed.

mit $\dot{x}_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}$ $\qquad x_i = x_i(q_1, \dots, q_S, t)$

$i = 1 \dots 3N$, x_1, x_2, x_3 .. 1. Teilchen

$x_4, \dots$ ... 2. Teilchen

$\vdots$

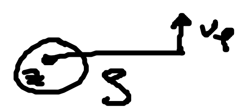
$\xrightarrow{\text{in (12.36)}}$

$$\boxed{\begin{aligned} W &= q\varphi - q\sum_j a_j \dot{q}_j + q \underbrace{\sum_i A_i \frac{\partial x_i}{\partial t}}_{=0 \text{ für skleronome Zwangsbed.}} \\ \text{mit} \quad a_j(\{q_j\}, t) &= \underbrace{\sum_i A_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}}_{\dots \text{ generalis. Vektorpotential}} \end{aligned}} \qquad (13.26)$$

(iii) ebene Bewegung: $x, y \longrightarrow \rho, \varphi$
(im Potential)

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \underset{\substack{x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi}}{=} \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{radialer Impuls:} && p_\rho = \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho} \\ &\text{Drehimpuls:} && p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} = m\rho \underbrace{v_\varphi}_{\text{azimutale Geschw.}} \end{aligned}} \qquad (13.27)$$



13.5 Symmetrien & Erhaltungssätzen

• Lagrange-Gln.: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, $j = 1, \dots, f$

mit $L = T - U$ .. kons. Systeme

$\hat{=}$ f DGln. 2. Ord. in t

$\longrightarrow$ Lsg. mit 2f Integ. konst.

<u>nicht</u> immer explizit angebbar!

(" " integrierbar)

- trotzdem: hilfreiche Aussagen über System möglich

$\longrightarrow$ **Noether Theorem:** Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikal. Systems gehört eine Erhaltungsgröße und umgekehrt

kont. Symmetrie = konti. Transformation, die Verhalten des physikalischen Systems nicht verändert

Erhaltungsgröße = 1. Integrale der Bewegung

$$E = E(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) = \text{konst.} \quad \forall t$$

.. Untersuche anhand von $L = T - U$

a) <u>Impulserhaltung</u>

- <u>Def.</u>: zyklische Koord.: $\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0}$ (13.28)

... Symmetrie von L bzgl. Verschiebung q_j

- (13.28) in (13.3) $\longrightarrow$ $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \overset{(13.23)}{=} \frac{d}{dt} p_j = 0!$

$$\boxed{p_j = \text{konst}}$$

... Impulserhaltung $\hat{=}$ Konstante der Bewegung

- <u>Bsp.</u>: (i) freies Teilchen: $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \longrightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \text{konst.}!$

$$\boxed{\text{Impulserhaltung} \longleftrightarrow \text{„Translationsinvarianz des Raumes" Homogenität}}$$

(ii) Teilchen im Zentralpotential: $U = U(r)$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \longrightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \text{konst.}$$

$$\boxed{\text{Drehimpulserhaltung} \longleftrightarrow \begin{array}{l}\text{Drehinvarianz}\\ \text{Isotropie}\end{array} \text{ des Raumes}}$$

(iii) Vielteilchensysteme:

– Schwerpkts. Koord. $R_j = q_j$ ≙ Verschiebung des ges. Systems

falls $\frac{\partial L}{\partial R_j} = 0 \longrightarrow P_j = \frac{\partial L}{\partial \dot R_j} = \text{konst.}$

... Erhaltung des Gesamtimpulses [Bew.: Goldstein / Nolting]

– Drehung des Gesamtsystems um $\varphi = q_j$ um Achse $\hat{\underline{\nu}}$

falls $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \longrightarrow P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = \text{konst.}$

... Erhaltung des Gesamtdrehimpulses [Bew: Goldstein]

b) $\boxed{\underline{\text{Energieerhaltung}}: \longleftrightarrow \text{„Invarianz unter Zeittranslation"}}$

· also $\boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = 0}$ (13.29) $\longrightarrow \frac{d}{dt} L = \sum_j \Big(\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}} \dot q_j + \frac{\partial L}{\partial \dot q_j} \ddot q_j \Big)$

Invarianz

$$\longrightarrow 0 = \frac{d}{dt}\Big[L - \sum_j \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}}_{p_j} \dot q_j\Big]$$

$$\longrightarrow \boxed{H = \sum_j p_j \dot q_j - L = \text{konst.}} \quad (13.30)$$

... Hamiltonfkt!

· Bedeutung von H?