13.5 Symmetrien & Erhaltungssätze

b) $\boxed{\text{Energieerhaltung:} \longleftrightarrow \text{„Invarianz unter Zeittranslation"}}$

• also: $\boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = 0}$ (13.29) $\longrightarrow$ $\boxed{H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L = \text{konst}}$ (13.30)

…Hamiltonfkt.!

• Bedeutung von H:

mit $L = T - U \xrightarrow[p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}]{(13.30)} H = \sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - T + U$ (13.31)

– kinet. Energie: $T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\underline{r}}_i^2$ mit $\dot{\underline{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$

$\underline{r}_i = \underline{r}_i(\{q_j\}, t)$

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{f} a_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{j=1}^{f} b_j \dot{q}_j + c \\ \text{mit } a_{jk} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} = a_{kj} \\ b_j &= \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \\ c &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} \right)^2 \end{aligned}} \quad (13.32)$$

- skleronome Zwangsbed.:

$$\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} = 0 \xrightarrow[c=0=b_j]{} \boxed{T = \frac{1}{2}\sum_{jk} a_{jk}\,\dot q_j\,\dot q_k} \quad (13.33)$$

... homogene Fkt. 2. Ordnung in $\dot q_j$

$$\text{Temans } \xrightarrow{(13.21)} \boxed{\sum_j \frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\dot q_j = 2T} \quad (13.34)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_j} \overset{a_{jk}=a_{kj}}{=} \sum_k a_{jk}\dot q_k \,!$$

mit (13.34) in (13.21): $H = 2T - T + U$

$$\longrightarrow \boxed{H = T + U} \quad (13.35)$$

... Gesamtenergie

- Bem.: (i) gilt für kons. Systeme mit skleronomen, holonomen Zwangsbed.

(ii) o.B.: gilt auch für generalisierte Potentiale

$$W = q\varphi - q\sum_i A_i\,\dot x_i \quad (12.36)$$

aber: $H = T + q\varphi$

c) Eichinvarianz von L:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Invarianz von } \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot q_j} - \dfrac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (*) \\ \text{unter Eichtransformation: } L \longrightarrow L + \dfrac{d}{dt} f(\{q_j\}, t) \\ \qquad\qquad \text{wobei } f(\ldots) \text{ beliebige Fkt. ist} \end{array}} \quad (13.36)$$

Beweis:

(i) Setze $L + \frac{d}{dt} f$ in (*) ein $\Rightarrow$ f fällt raus

(ii) $S = \int_{t_1}^{t_2} [L + \frac{d}{dt} f]\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt + f(\dots, t_2) - f(\dots, t_1)$

$$\delta S = 0 \rightarrow 0 = \int \delta L\, dt + \underbrace{\delta f(\dots, t_2)}_{=0} - \underbrace{\delta f(\dots, t_1)}_{=0}$$

$$= \int \delta L\, dt \quad \text{qed}$$

$\longrightarrow$ L ist nicht eindeutig

14. Hamiltonsche Mechanik

- Motivation:

  - Lagrangesche Mechanik: $\{q_1, \dots, q_s\}$ ... generalisierte Koord.

    Lagrange-Fkt: $L = L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t) \longrightarrow$

    Lagrange Bewgln.: $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

    $$\longrightarrow q_j = q_j(t)$$

    aber: dynam. Zustand zur Zeit t nur eindeutig festgelegt, bei Kenntnis von

    $$\underbrace{\{q_j(t)\}, \{\dot{q}_j(t)\}}_{\text{Satz von } 2f \text{ unabh. Variable}}$$

  - Hamiltonsche Mechanik:

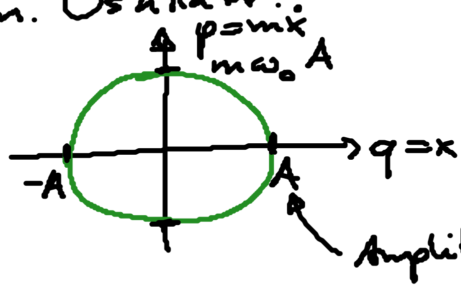
    wähle $\{q_i(t)\}$, $\{p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\}$ als Satz von $2f$ unabhängigen Variablen

    $\longrightarrow$ Hamilton-Fkt. ?

    Hamiltonschen-Bew.gln. ?

- Phasenraum Γ:
  (i) wird aufgespannt durch $\{q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f\}$
  $\hat{=}$ $2f$ Dimensionen
  (ii) Punkt in Γ $\hat{=}$ eindeutiger Zustand eines Systems
  (iii) Bahn in Γ $\hat{=}$ Zeitentwicklung

Bsp: harm. Oszillator:



$\omega_0 \dots$ Eigenfrequenz

- wichtig! → tiefere Einsicht in die Struktur der Mechanik
  → statistische Mechanik
  → Zugang zur „Quantisierung von mechan. Systemen"

14.1 Legendre Transformationen

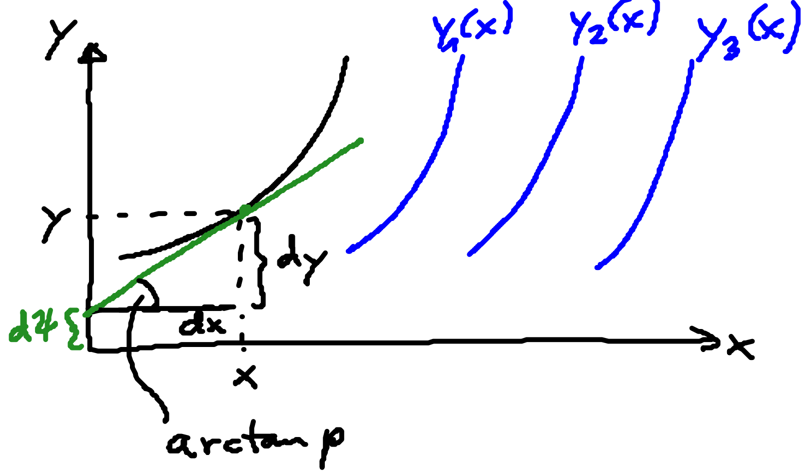
- Ziel: $\{q_1, \dots, q_f, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_f\} \longrightarrow \{q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f\}$
  Theorie mit gleicher Info!?

1-dim. allg. Fall

- Geg: allg. Fkt. $y = y(x)$ mit $p(x) = \frac{\partial y}{\partial x} \xrightarrow[\text{existiere}]{\text{Umkehrung}} x = x(p)$

  später: L $\quad \dot{q}_j$ $\quad p_j$

$$\longrightarrow \quad y = y(x(p)) = y(p)$$



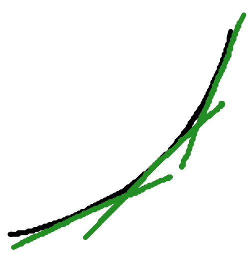
• Frage: $y(p) \longrightarrow y(x)$?

$\hookrightarrow \quad x = x(y)$!

Umkehrung

Antwort: nein, denn $y(p) \hat{=}$ Kurvenschar $y_i(x)$ als Lsg. von $\frac{dy_i}{dx} = p(y)$

• Ausweg: $y(x)$ ist Einhüllende seiner Tangentenschar



Tangentenschar eindeutig bestimmt durch p, $\Psi = \Psi(p)$ ... Ordinatenabschnitt

$\longrightarrow$ Legendre-Transformation

mit $p = \frac{y - \Psi}{x} \longrightarrow$
$$\boxed{\Psi(p) = y(p) - p\,x(p)} \qquad (14.1)$$

... Legendre-Transformierte von $y(x)$

mit Differential:
$$d\Psi = \cancel{dy} - \cancel{p\,dx} \underbrace{-\,x}_{\frac{\partial\Psi}{\partial p}} dp$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{x = -\frac{\partial \Psi}{\partial p}} \qquad (14.2)$$

- Umkehrung:

$$\Psi(p) \longrightarrow x = -\frac{\partial\Psi}{\partial p} \xrightarrow[\text{kehr}]{\text{Um}} p = p(x) \xrightarrow{\text{(in 14.1)}} \boxed{\begin{aligned} y(x) &= y(p(x)) \\ &= \Psi(p(x)) + p(x)\,x \end{aligned}}$$

- Anwendung auf $y = y(x_1, \dots, x_n)$ entsprechend!
- <u>wichtig</u>: in Thermodynamik

14.2. <u>Hamiltonsche Bewegungsgleichungen</u>

- Legendre-Transformation der Lagrange-Fkt.:

  also: Austausch aller $\dot{q}_j$ durch $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

$$\longrightarrow \boxed{H(\{q_j\}, \{p_j\}, t) = \sum_{j=1}^{f} p_j \dot{q}_j - L(\{q_j\}, \{\dot{q}_j\}, t)} \quad (13.30)$$

... Hamilton-Fkt. [vgl. Kap. 13.5 b)]

NB: Minuszeichen $\hat{=}$ Konvention

- Berechnen Differential:

$$dH \overset{\text{l.S.}}{\underset{(13.30)}{=}} \sum_j \left(\underline{\frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j} + \underline{\frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt$$

$$\overset{\text{r.S}}{\underset{(13.30)}{=}} \sum_j \Big(\dot{q}_j dp_j + \cancel{p_j d\dot{q}_j} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_j}}_{= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \dot{p}_j} dq_j - \cancel{\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} d\dot{q}_j} \Big) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_j \left(\underline{-\dot{p}_j\, dq_j} + \underline{\dot{q}_j\, dp_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

Vergleich der Vorfaktoren von dq_j, dp_j, dt

$$\longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned}} \qquad (14.4)$$

... Hamiltonsche (kanonische) Gln.

2f Dgln. 1. Ord. für q_j und p_j

$$\& \quad \boxed{\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}} \qquad (14.5)$$