15. Hamilton-Jacobische Theorie

· erzeugende Funktion für kanon. Trafo auf

$$Q_k = \beta_k = \text{konst.}$$
$$P_k = \alpha_k = \text{konst.}$$

$$\longrightarrow \boxed{S(\{q_j\}, \{\alpha_j\}, t)} \quad (15.3)$$

... Hamilton-Jacobische-Wirkungsfkt.
(Hamiltonsche Prinzipalfkt.)

mit $p_j = \frac{\partial S}{\partial q_j}$ und $H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

$$\longrightarrow \boxed{H\left(\{q_j\}, \left\{\frac{\partial S}{\partial q_j}\right\}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \quad (15.4)$$

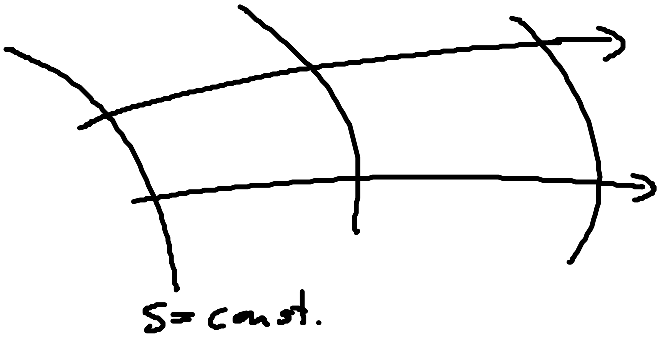
... Hamilton-Jacobische-Dgl. für S!

· Eigenschaft von S:

$$\frac{dS}{dt} = \underbrace{\frac{\partial S}{\partial t}}_{\overset{(15.2)}{=} -H} + \sum_j \underbrace{\frac{\partial S}{\partial q_j}}_{\underset{(14.13)}{=} p_j} \dot{q}_j = -H + \sum_j p_j \dot{q}_j \overset{(13.30)}{=} L$$

$$\longrightarrow \boxed{S = \int_{t_1}^{t_2} L \, dt} \quad !!!$$

· Anschluß an die QM: ($\longrightarrow$ Goldstein)



$S = $ konst.
$=$ Wellenfront im Ortsraum $\{q_i\}$
Geschw. $c = \dfrac{E}{\sqrt{2(E-V)}}$

$\xleftrightarrow[\text{zu}]{\text{Analogie}}$

Grenzfall der geometr. Optik für Lichtwellen (Eikonalgleichung)

$?\uparrow \;\downarrow ?$

$\uparrow \lambda |\nabla n| \ll n$

Schrödingersche Wellenmechanik

$\longleftrightarrow$

Wellengl. für Lichtwellen
$$\left(\nabla^2 - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = 0$$
ϕ ... skalares Potential

IV. Spezielle Relativitätstheorie

- Einstein (1905)

[neben Erklärung photoelektr. Effekt: $E = h\nu$ und Brownsche Bewegung: Stokes-Einstein-Relation]

16. Die Lorentz-Transformation

- Trafo von IS $\longrightarrow$ IS'

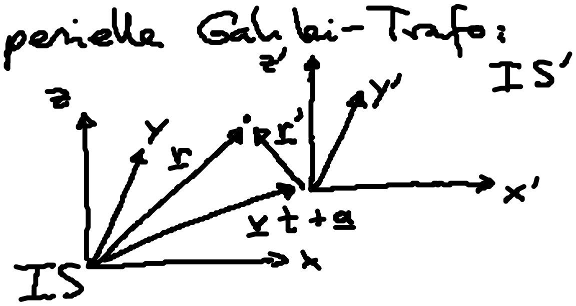
16.1. Situation vor Einstein

a) Galileische Relativitätsprinzip:

- $\boxed{\text{Alle IS (in ihnen gelten die Newtonschen Axiome) sind gleichwertig = die Newt. Axiome sind „forminvariant" (= kovariant) unter Galileitransf.}}$ (16.1)

Trafo von IS → IS'

- spezielle Galilei-Trafo:



$$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}t - \underline{a} \quad (16.2) \quad \xrightarrow{\text{o.B.d.A}} \quad \underline{v} = v\,\underline{e}_x, \quad \underline{a} = 0$$

„boost" in x-Richtung

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}} \quad (16.3)$$

Zeit läuft absolut

- Addition von Geschw.

$$\underbrace{\underline{v}_0}_{\underline{v}_0 = \frac{d\underline{r}}{dt}} \text{ in IS} \xrightarrow[\frac{d}{dt}(16.2)]{} \underline{v}' = \underline{v}_0 - \underline{v}$$

b) Licht = em. Welle: vor Einstein: „verwirrende Tatsachen"

- Maxwell-Gln.: ⟶ Wellengl. für Lichtwellen

$$\left[\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\underline{E} = 0$$ [vgl. (11.24) für Saite]

elektr. Feld

Lichtgeschw. unabhängig von IS!

also: Kugelwelle IS ⟶ Kugelwelle in IS'

- Maxwell-Gln. <u>nicht</u> invariant unter Galilei-Trafo!

- <u>Ätherhypothese</u>: $\boxed{\text{Licht bewegt sich mit } c \text{ in einem „elastischen Medium"; darf keine „Schallwellen" = Longitudinalwellen erlauben!}}$

Äther = IS: c, Kugelwelle

IS': $\underline{c} - \underline{v}$! ↯ zu Maxwell-Gln.

<u>keine</u> Kugelwelle

- Michelson-Morley-Exp.:

$\boxed{\text{gleiches } c \text{ auf Erde \& im Weltraum}}$

⟶ Erklärungsversuche von Lorentz & Fitzgerald: „Lorentzkontraktion"

16.2. <u>Einsteinsches Relativitätsprinzip</u>

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Alle IS sind gleichwertig} \\ \quad = \text{alle physikal. Gesetze sind kovariant unter Lorentztrafo}\end{array}}$ (16.6)

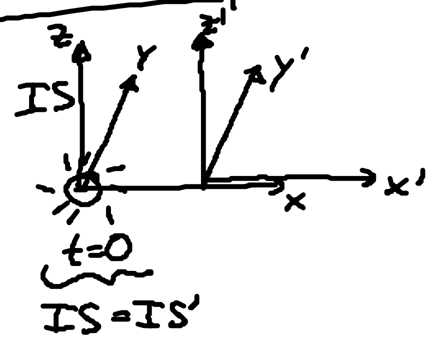
⟶ $\boxed{\text{Die Lichtgeschw. } c \text{ ist unabh. von IS}}$ (16.7)

⟶ neue Struktur Raumzeit! bisher: Euklid Raum & absolute Zeit

jetzt:

16.3 <u>Der Minkowski-Raum</u>

· Gedanken Exp.



Ausbreitung eines Lichtpulses bei $t=0$:

$$\left.\begin{aligned} &\text{in IS:} \quad -c^2t^2 + \underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\underline{r}^2} = 0 \\ &\text{in IS':} \quad -c^2t'^2 + \underbrace{(x'^2+y'^2+z'^2)}_{\underline{r}'^2} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (16.8)$$

Zeit in IS' !!

· Lineare Trafo: $\{\underline{r}, t\} \longrightarrow \{\underline{r}', t'\}$

Grund: $\ddot{\underline{r}} = 0 \longrightarrow \ddot{\underline{r}}' = 0$

also: (16.8) für allg. Ereignis:

$$-c^2t^2 + \underline{r}^2 = \lambda(\underline{v}) \left[-c^2t'^2 + \underline{r}'^2\right]$$

(i) $\lambda(\underline{v}) = \lambda(v)$ ... Isotropie des Raumes

(ii) IS → IS' → IS: $\lambda^2 = 1 \longrightarrow \lambda = \underset{(-)}{+1}$

keine Stetigkeit für $v \to 0$

$$\longrightarrow \boxed{-c^2t^2 + x^2+y^2+z^2 = -c^2t'^2 + x'^2+y'^2+z'^2} \quad (16.9)$$

... Norm im Minkowski-Raum ist Lorentz-Skalar

· Minkowski-Raum: = 4D Raumzeit

(kontravarianter) Vierervektor:

$$\begin{pmatrix} ct \\ \underline{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad (16.10)$$

, Komp: x^α, $\alpha = 0,1,2,3$

– Minkowski-Norm:

$$\Delta s^2 = x^\alpha g_{\alpha\beta} x^\beta = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad (16.11)$$

mit $g_{\alpha\beta}$ Elemente von $\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ ... metrischer Tensor (16.12)

- kovarianter Vierervektor:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \qquad \text{Komp.:} \qquad x_\alpha = g_{\alpha\beta}\, x^\beta \qquad (16.13)$$

- Minkowski-Norm:

$$\Delta s^2 = x^\alpha x_\alpha \qquad (16.14)$$