16.3 Minkowski-Raum = 4D-Raumzeit

Lichtausbreitung $\longrightarrow$

$$\boxed{-c^2t^2+x^2+y^2+z^2=-c^2t'^2+x'^2+y'^2+z'^2} \quad (16.9)$$

... Norm im Minkowski-Raum
= Lorentz-Skalar

- Vierervektor:
(kontravariant)
$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, Komp. x^α

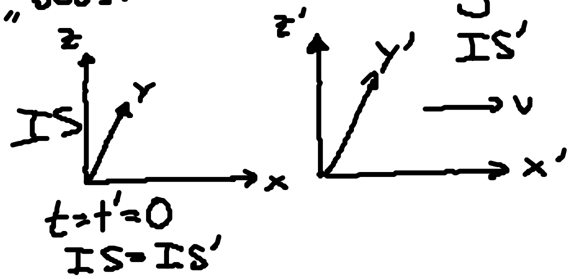
kovariant: $\begin{pmatrix} -ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ $\quad x_\alpha = g_{\alpha\beta}x^\beta$

$\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ ... metrischer Tensor

- Minkowski-Norm: $\Delta s^2 = x^\alpha x_\alpha$

16.4. Die Lorentztrafo

- Trafo von IS $\longrightarrow$ IS'
- Def: $\boxed{\text{Die Minkowski-Norm (16.9) ist invariant unter Lorentztrafos.}}$
- „boost" in x-Richtung: also $y=y'$, $z=z'$



$t=t'=0$
IS=IS'

allg. lineare Trafo:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (16.15)$$

⋮ [s. Kopie]

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= \gamma(x-\beta ct) \\ ct' &= \gamma(ct-\beta x) \\ \beta = \frac{v}{c}\ &,\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}} \qquad (16.16)$$

Lorentz-Trafo für Geschw. „boost“ in x-Richtung

NB: (1) $\beta = \frac{v}{c} \ll 1 \longrightarrow \beta = 0\ ,\ \gamma \approx 1$

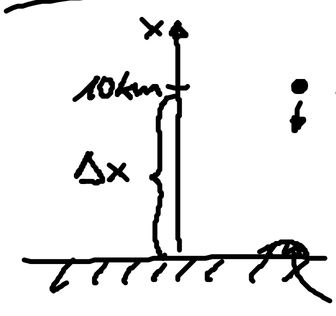
$$\xrightarrow[\beta c = v]{(16.16)} \quad \left.\begin{aligned} x' &= x - vt \\ t' &= t \end{aligned}\right\} \text{ Galilei-Trafo } ✓$$

(2) synchronisierte Uhren in IS: $\longrightarrow x$

$$\longrightarrow \quad ct' = -\gamma\beta x$$

$ct = 0$ … nicht synchronisiert in IS'!
Gleichzeitigkeit ist relativ!

- illustratives Bsp.:



Myon mit Lebensdauer $\tau = 2\cdot 10^{-6}\,s$

Messung der Myonen

(1) ohne SRT: $v_\mu \simeq 3\cdot 10^8 \frac{m}{s}$

$$\longrightarrow \quad s = v_\mu \tau = 600m \ll 10\,km \ \text{↯}$$

(2) mit SRT: IS = Erde
IS' = Myon bei $x' = 0$, „innere Uhr“: $\tau = \Delta t'$

a) in IS: Flugzeit Δt ?

$$(16.16) \longrightarrow \quad \begin{aligned} c\Delta t' &= \gamma(c\Delta t - \beta \Delta x) \quad (1) \\ \Delta x' = 0 &= \gamma(\Delta x - \beta c\, \Delta t) \quad (2) \end{aligned}$$

$$(2) \longrightarrow \quad \Delta x = \beta c\, \Delta t$$

$$\text{in }(1) \longrightarrow \quad c\,\Delta t' = \gamma\, c\, \Delta t \underbrace{(1-\beta^2)}_{\gamma^{-2}}$$

$$\boxed{\Delta t' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\Delta t < \Delta t}$$

... Zeitdilatation = bewegte Uhren gehen langsamer

Bsp: $v = \frac{999}{1000} c \longrightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx \frac{5}{100} \longrightarrow \Delta t = \frac{100}{5}\tau = 4 \cdot 10^{-5}\,s$

$$\longrightarrow \Delta x \approx c\,\Delta t = 12\,km \checkmark$$

b) IS': Flugweg $\Delta x'$? „Messe Δx" in IS' für $\Delta t' = 0$

$$\Delta x' = \gamma\,(\Delta x - \beta c\,\Delta t) \quad (3)$$

$$0 = \gamma\,(c\Delta t - \beta\,\Delta x) \quad (4)$$

$$(4) \longrightarrow \quad c\,\Delta t = \beta\,\Delta x \quad \text{in } (3)$$

$$\Delta x' = \gamma\,\Delta x \underbrace{(1-\beta^2)}_{\gamma^{-2}}$$

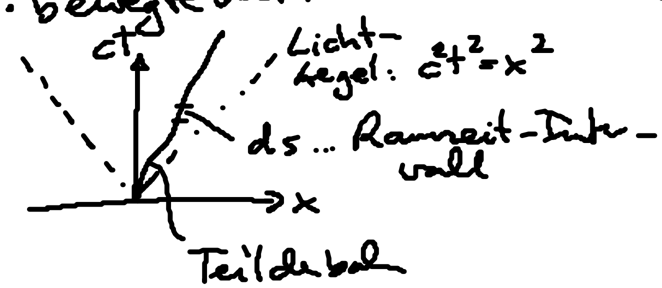
$$\longrightarrow \boxed{\Delta x' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\Delta x < \Delta x} \quad (16.18)$$

... Lorentzkontraktion = bewegte Maßstäbe sind kürzer !!

17. Relativistische Mechanik

17.1. Eigenzeit

• bewegte Uhr:



$$(16.17) \qquad c\,d\tau = c\,dt' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,c\,dt$$

$$= \left[c^2dt^2 - v^2dt^2\right]^{1/2}$$

$$= \big[\underbrace{c^2dt^2 - d\underline{r}^2}_{ds^2 \,\dots\, \text{Lorentzskalar}}\big]^{1/2}$$

$$\longrightarrow \boxed{\tau = \int \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt = \int \gamma^{-1} dt} \quad (16.19)$$

… Eigenzeit = Lorentzskalar

17.2 Impulssatz

- Regeln: (i) verknüpfe Vierervektoren

  (ii) $\frac{v}{c} \ll 1 \longrightarrow$ Newtonsche Mechanik

- Differenzvektor: $dx^\alpha, \begin{pmatrix} c\,dt \\ d\underline{r} \end{pmatrix}$ (16.20)

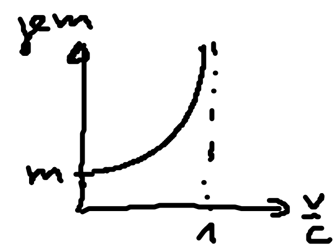
- Vierer-Geschw.:

$$\boxed{u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{\underbrace{d\tau}_{\text{Skalar}}} \overset{16.19}{=} \gamma \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \frac{d\underline{r}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma c \\ \gamma \underline{v} \end{pmatrix}} \quad (16.21)$$

- Vierer-Impuls:

$$\boxed{p^\alpha = \underbrace{m}_{\text{Masse = Skalar}} u^\alpha, \quad \begin{pmatrix} m\gamma c \\ m\gamma \underline{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^0 \\ \underline{p} \end{pmatrix}} \quad (16.22)$$

$$\boxed{\underline{p} = \underbrace{\frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\text{geschw. abhängige Impulsmasse!}} \underline{v}} \quad (16.23)$$



- Impulssatz:

$$\boxed{\frac{dp^\alpha}{d\tau} = \underbrace{K^\alpha}_{\text{Viererkraft!?}}} \quad (16.24)$$

(i) räumliche Komponenten: $(\alpha = 1, 2, 3)$

$$\boxed{\frac{dp}{d\tau} = \gamma \frac{dp}{dt} \underset{\uparrow}{=} \gamma \underline{F} = \underline{K}} \quad (16.25)$$

„Newton"

macht Sinn: $\frac{v}{c} \to 0 \mathrel{\hat{=}} \gamma \approx 1$; $\frac{dm\underline{v}}{dt} = \underline{F}$!

(ii) zeitliche Komponente: $(\alpha = 0)$

- Geschwindigkeitsquadrat:

$$u^\alpha u_\alpha \underset{(16.21)}{=} \gamma^2 \underbrace{(-c^2 + v^2)}_{-c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = -c^2 \quad (16.26)$$

- Betrachte: $\frac{1}{2} m \frac{d}{d\tau} u^\alpha u_\alpha = 0 = m\, u_\alpha \frac{du^\alpha}{d\tau} = u_\alpha \frac{dp^\alpha}{d\tau}$

$$\longrightarrow \quad 0 = u_\alpha K^\alpha = \underbrace{-u^0}_{u_0 = -\gamma c} K^0 + \gamma \underline{v} \cdot \underbrace{\underline{K}}_{\gamma \underline{F}}$$

also: $$\boxed{\begin{aligned} K^0 &= \frac{\gamma}{c} \underline{v} \cdot \underline{F} \\ &= \frac{\gamma}{c} W \end{aligned}}$$

pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit!

- Energiesatz! aus 0.ter Komp. von Impulssatz

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \gamma \frac{dp^0}{dt} = K^0 = \frac{\gamma}{c} \underline{v} \cdot \underline{F}$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = \underline{v} \cdot \underline{F}} \quad (16.27)$$

mit $E = c p^0 \underset{(16.22)}{=} m \gamma c^2$ ... Energie eines Teilchens

Grenzfall: $\frac{v}{c} \ll 1$

$$E = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c^2 \approx mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{E = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruhe-energie}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} m v^2}_{\text{kinet. Energie}}} \qquad (16.28)$$