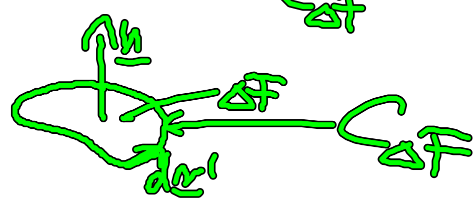
Wh: Ableitungen von Vektorfeldern $\underline{A}(\underline{r},t)$

- Divergenz $\rightarrow$ Quelldichte

- Rotation $\rightarrow$ Wirbeldichte von $\underline{A}(\underline{r})$

Integraldefinition:

$$\text{rot}\,\underline{A}(\underline{r})\cdot\underline{n} = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{1}{\Delta F} \oint_{C_{\Delta F}} d\underline{r}'\cdot\underline{A}(\underline{r}')$$



Auswertung für kartesische Koordinaten

$$\text{rot}\,\underline{A}(\underline{r}) = \underbrace{\nabla}_{\text{Nabla-Operator}} \times \underline{A}(\underline{r}) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x(\underline{r}) \\ A_y(\underline{r}) \\ A_z(\underline{r}) \end{pmatrix}$$

Stoke'scher Integralsatz

$$\underbrace{\oint_C \underline{A}(\underline{r}')\cdot d\underline{r}'}_{\text{Kurvenintegral über Vektorfeld } \underline{A}} = \underbrace{\int d\underline{F}\cdot\left(\nabla\times\underline{A}(\underline{r}')\right)}_{\text{Flächenintegral über die Rotation}}$$

II. Elektrostatik

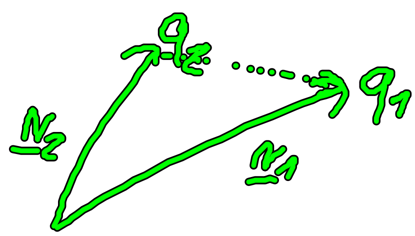
– Phänomene, die $\overbrace{\text{zeitlich konstante Ladungen}}^{\text{statisch}}$ und statische Felder involvieren

II.1. Grundlagen

II.1.1. Coulomb'sche Gesetz

Ausgangspunkt: Es gibt 2 Sorten von Ladungen, positiv und negativ. Diese Ladungen üben Kräfte aufeinander aus.

Betrachte konkret 2 punktförmige ruhende Ladungen q_1, q_2 an Orten $\underline{r}_1, \underline{r}_2$



$$\underset{\text{Kraft}}{\underline{F}} = k\, q_1 q_2 \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3}$$ Coulombkraft (1785)

Bemerkungen

- k ist eine positive Konstante.
  Es gibt dazu zwei Wahlmöglichkeiten

a) $k = 1$ „Gauß-System" (CGS)

Centimeter Gram Second

veraltet, aber immer noch in vielen Lehrbüchern und Publikationen verwendet

b) $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ mit $\varepsilon_0 = 8.8543 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

Diese Wahl nennt man „SI"

Système International d'unités

ε_0: Permittivität des Vakuums (oder auch "elektr. Feld-konstante")

Wir werden hier (meist) SI benutzen!

- Coulombkraft ist offensichtlich Zentralkraft! (da nur abhängig von Verbindungsvektor $\underline{r}_1 - \underline{r}_2$)

Sie ist attraktiv bzw. repulsiv falls

$q_1 q_2 < 0$ bzw. $q_1 q_2 > 0$

"ungleichnamig" "gleichnamig"

$$\boxed{\underline{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} q_1 q_2 \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3}}$$

• Abstandsabhängigkeit $\sim \frac{1}{r^2}$

← wie Gravitationskraft!

aber die Coulombkraft ist viel stärker!

Betrachte 2 Elementarladungen im Abstand eines Bohr-Radius ($a_B = 0.53$ Å $\sim 10^{-10}$ m)

typische atomare Längenskala

$F^{\text{Coulomb}} \sim 10^{-8}$ N

$F^{\text{Gravitation}} \sim 10^{-47}$ N

Unterschied von 39 Größenordnungen!

• Gültigkeit: bis hinein in den atomaren Bereich

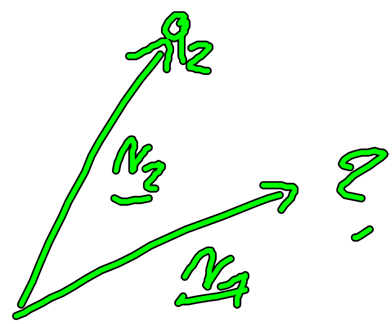
$r \gtrsim 10^{-13}$ m

Für kleinere Abstände gibt es quantenelektrodynamische Korrekturen infolge von Wechselwirkungen zwischen den geladenen Elementarteilchen und den „Austauschteilchen" der elektromagnet. WW, den Photonen

II.1.2. Elektrisches Feld

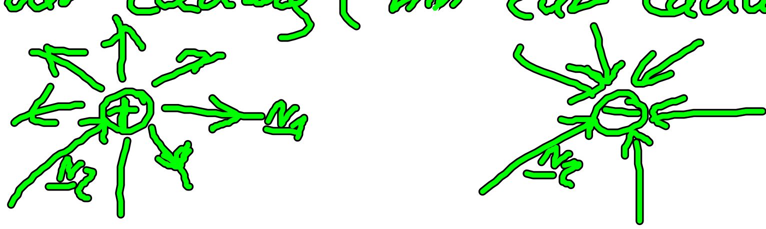
Wir definieren nun über die Coulombkraft das Feld $\underline{E}$, das durch eine Ladung q_2 bei $\underline{r}_2$ an einem Ort $\underline{r}_1$ erzeugt wird

$$\underbrace{\underline{F}(\underline{r}_1)}_{\underline{F}^{Coulomb}} \overset{!}{=} q_1 \underline{E}(\underline{r}_1)$$



$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}_1) = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3}$$

$\Rightarrow$ Feldlinien einer Punktladung verlaufen radial
und sind für $q_2 > 0$ ($q_2 < 0$)
weg von der Ladung (hin zur Ladung) gerichtet



Einheit des Feldes

$$\text{el. Feld} \mathrel{\hat{=}} \frac{\text{Kraft}}{\text{Ladung}}$$

Einheit $1 \frac{N}{C}$ (Newton) (Coulomb)

$1C = 1As$

benutze $1V = \frac{Nm}{As}$

Einheit für das Feld : $1 \frac{V}{m}$

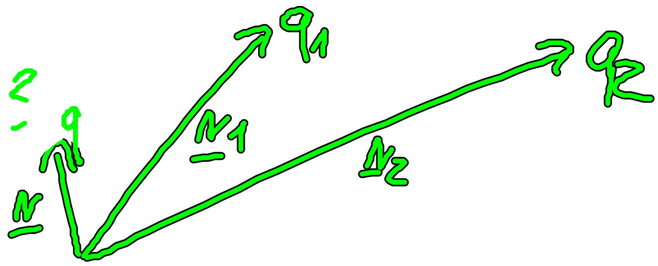
Verallgemeinerung des bisherigen Ausdrucks für das elektr. Feld

- Statt einer Punktladung seien N Punktladungen q_i mit $i = 1, .., N$ anwesend, die an den Orten $\underline{r}_i$ sitzen

$\Longrightarrow$ Kräfte auf eine Ladung q bei $\underline{r}$ addieren sich auf

$\Longleftrightarrow$ Coulombkraft ist additiv!

Superpositionsprinzip



$$\underline{F}(\underline{r}) = q\,\underline{E}(\underline{r})$$

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\underline{r}-\underline{r}_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|^3}$$

„diskrete Punktladungen"

- Betrachte statt des Satzes diskreter Punktladungen eine kontinuierliche Ladungsverteilung

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} q_i \longrightarrow \int d\underline{r}'\,\rho(\underline{r}')$$

„Ladungsdichte"

$$\underbrace{d\underline{r}'}_{\text{Volumenelement}}\,\rho(\underline{r}') = \underbrace{dq}_{\text{Ladung im Volumenelement } d\underline{r}'}$$

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int d\underline{r}'}_{\text{gesamter Raum}} \rho(\underline{r}') \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Spezialfall:

Die Ladungsdichte ist wieder aus Punktladungen aufgebaut

$$\rho(\underline{r}') = \sum_{i=1}^{N} q_i \, \delta(\underline{r}' - \underline{r}_i)$$

Deltafunktionen

Einsetzen

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \int d\underline{r}' \, \delta(\underline{r}' - \underline{r}_i) \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Benutze Eigenschaft der Deltafunktion: $\int dx \, f(x) \delta(x-a) = f(a)$

$\int d\underline{r} \, f(\underline{r}) \delta(\underline{r}-\underline{a}) = f(\underline{a})$

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\underline{r}-\underline{r}_i}{|\underline{r}-\underline{r}_i|^3}$$

alte Formel!

II.1.3. Elektrostatisches Potential

Ausgangspunkt:
$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}'\,\rho(\underline{r}')\underbrace{\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}_{=:\,\underline{f}(\underline{r},\underline{r}')}$$

Die Funktion $f(\underline{r},\underline{r}')$ kann ausgedrückt werden als
$$\underline{f}(\underline{r},\underline{r}') = -\nabla_{\underline{r}}\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)$$

denn:
$$\nabla_{\underline{r}}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \overset{\text{Kettenregel}\ R=|\underline{r}-\underline{r}'|}{=} \frac{d}{dR}\left(\frac{1}{R}\right)\nabla_{\underline{r}}R$$
$$= -\frac{1}{R^2}\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Einsetzen in Ausdruck für $\underline{E}(\underline{r})$

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}'\,\rho(\underline{r}')\,\nabla_{\underline{r}}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

kann aus Integral gezogen werden, da Ableitung nach $\underline{r}$!

$$= -\nabla_{\underline{r}}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}'\,\rho(\underline{r}')\,\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)$$

Definiere:

$$\boxed{\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}}$$

elektrostatische Potential

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla_{\underline{r}} \Phi(\underline{r})$$

Interpretation: Für ein gegebenes elektrostatisches Feld kann man ein skalares elektrostat. Potential angeben

Beachte dabei: $\Phi(\underline{r})$ ist nur bis auf eine Konstante bestimmt!

Spezialfall Punktladung:

$$\rho(\underline{r}') = \delta(\underline{r}' - \underline{r}_1)\, q_1$$

einsetzen in die Definition

$$\Rightarrow \Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, q_1 \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}_1|}$$

Punkt, an dem man schaut

Punkt, an dem die Ladung lokalisiert ist

Wichtig: Abstandsabhängigkeit $\frac{1}{r}$

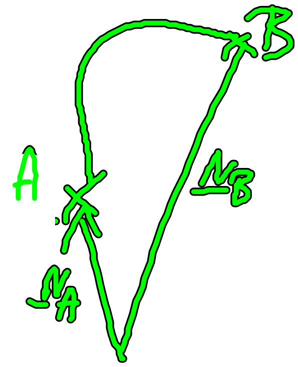
Bezug zwischen elektrostat. Potential und Energie

Betrachte Ladung q im Feld $\underline{E}(\underline{r})$

Frage: Welche Arbeit muß man aufwenden, um q vom Ort $\underline{r}_A$ zum Ort $\underline{r}_B$ zu bringen?

Arbeit

$$W = \underbrace{-\int_A^B d\underline{r}\,\underline{F}(\underline{r})}_{\text{allgemeiner Ausdruck für Arbeit, bekannt aus Mechanik}} = -q\int_A^B d\underline{r}\cdot\underline{E}(\underline{r})$$



benutze jetzt $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla_{\underline{r}}\,\Phi(\underline{r})$

$$W = -q\int_A^B d\underline{r}\,\left(-\nabla_{\underline{r}}\Phi(\underline{r})\right)$$

$$= q\left(\Phi(\underline{r}_B) - \Phi(\underline{r}_A)\right)$$

Arbeit $\hat{=}$ Differenz potentieller Energien

(Interpretation wie in der klass. Mechanik!)

$\Rightarrow$ $q\Phi(\underline{r})$ ist die potentielle Energie einer Ladung im Feld $\underline{E}(\underline{r})$!

Man sieht außerdem:

Die Arbeit W ist offensichtlich unabhängig vom Weg von A nach B; es kommt nur auf die Differenz der potentiellen Energien an!

$$\oint \underline{E}(\underline{r}')\cdot d\underline{r}' = 0$$

geschlossenes Kurvenintegral

$\boxed{\text{Vektoranalysis: } \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi(\underline{r}) = 0}$

Folgerung:

$$\text{rot}\,\underline{E}(\underline{r}) = \nabla_{\underline{r}} \times \underline{E}(\underline{r}) = -\underbrace{\nabla_{\underline{r}} \times \nabla_{\underline{r}}}_{=0} \Phi(\underline{r}) \quad !$$

Elektrostatische Felder sind also wirbelfrei!

Bemerkung:

- Dies ist anders in der Elektro<u>dynamik</u>:
  Durch zeitliche Änderung eines Magnetfeldes kann man elektrische Felder mit Wirbeln erzeugen
  ($\text{rot}\,E(\underline{r},t) \neq 0$)
- In der Elektrostatik ist jedoch die Gleichung $\text{rot}\,\underline{E}(\underline{r}) = 0$ eine <u>Grundgleichung</u>!