II.1.4. Gauß'sches Gesetz

Motivation:

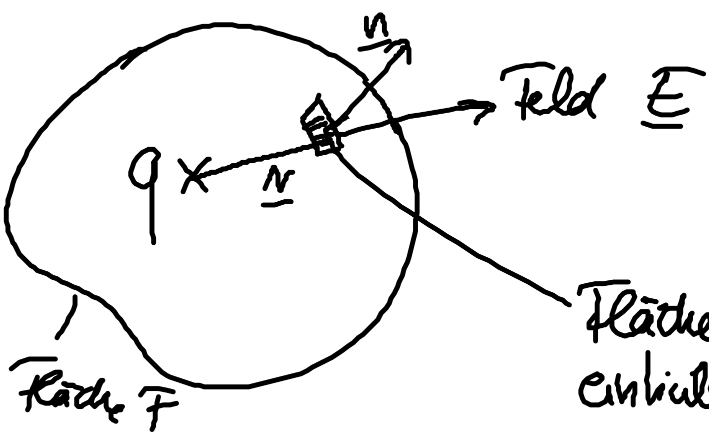
Die Integralformel für das elektrische Feld, $\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\underline{r}' \, \rho(\underline{r}') \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$,

$\uparrow$ Ladungsdichte

ist nicht immer der bequemste Weg, um das Feld auszurechnen!

Alternative: Gauß'sches Gesetz

Betrachte Punktladung q am Ursprung des Koordinatensystems, umhüllt von einer geschlossenen Fläche F



Flächenelement dF der einhüllenden Fläche, mit Normalenvektor $\underline{n}$

$\underline{r}$: Abstandsvektor von der Ladung (Ursprung) zum Flächenelement

Der sogenannte Fluß des E-Feldes durch dF ist definiert als

$$\underline{E}(\underline{r})\cdot \underbrace{d\underline{F}}_{\underline{n}\,dF} = |\underline{E}(\underline{r})|\cdot \underbrace{|\underline{n}|}_{1}\cdot \cos\vartheta \, dF$$

benutze Ausdruck für das Feld einer Punktladung:

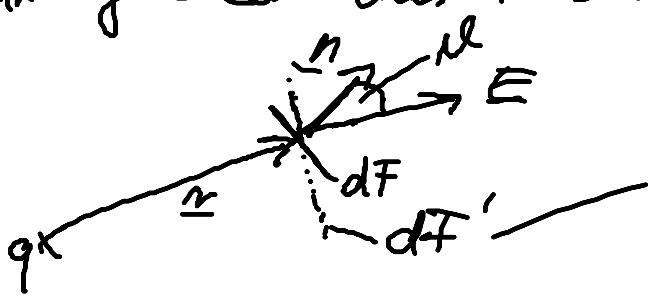
$$|\underline{E}(\underline{r})| = \left| -\nabla_{\underline{r}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \right|$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Einsetzen

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r})\cdot d\underline{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\cos\vartheta \, dF$$

betrachte genauer das Produkt $\cos\vartheta \, dF$



Flächenelement, dessen Normalenvektor radial zum Ursprung gerichtet ist.

Mit dieser Überlegung ergibt sich

$$dF\cos\vartheta = \underbrace{dF'}$$

Flächenelement, das
senkrecht auf $\underline{r}$ steht
$\hat{=}$ Flächenelement einer Kugel:

$$= r^2 \underbrace{d\Omega}_{\text{Raumwinkelelement}}$$

mit $d\Omega = d\vartheta \sin\vartheta \, d\varphi$

Einsetzen in den Ausdruck für den Fluß durch das Flächenelement:

$$\underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} dF' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} r^2 d\Omega$$

$$= q/4\pi\varepsilon_0 \, d\Omega$$

Berechne nun den Gesamtfluß durch die Fläche $\hat{=}$ Flächenintegral

$$\oint_F \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{F} = \oint_{F_{Kugel}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi}_{4\pi}$$

F_{Kugel} mit (beliebigem) Radius r

$$= q/\varepsilon_0$$

d.h. Gesamtfluß ist gegeben durch die eingeschlossene Ladung q dividiert durch ε_0

Man sieht:

- Der Gesamtfluss ist unabhängig von der Form des Volumens und von der Größe der Kugel (d.h. vom Radius!)

— Folge der $\frac{1}{r^2}$-Abhängigkeit des elektr. Feldes!

Verallgemeinerung für kontinuierliche Ladungsverteilungen

Gauß'sches Gesetz

$$\boxed{\oint_{\underline{F}} \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{F} = \frac{1}{\varepsilon_0} \underbrace{\int d\underline{r}\, \rho(\underline{r})}_{\text{eingeschlossene Ladung in } \underline{F}}}$$

Differentielle Form:

$$\oint_{F} \underline{E}(\underline{r}) \cdot d\underline{F} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß'scher} \\ \text{Integralsatz}}}{=} \int_V \operatorname{div} \underline{E}(\underline{r})\, \overbrace{dV}^{d\underline{r}}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \int dV \, \rho(\underline{r})$$

Gauß'sches Gesetz

Vergleich der $\underbrace{\text{Ausdrücke}}_{\text{letzten beiden}}$ $\Longrightarrow$

$$\boxed{\mathrm{div}\, \underline{E}(\underline{r}) = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}}$$

Differentielle Form des Gauß'schen Gesetzes!

Diese Formel entspricht bereits einer der Maxwell-Gleichungen; sie gilt auch im zeitabhängigen Fall!

Erinnerung:
Speziell für die Elektrostatik gilt außerdem

$$\mathrm{rot}\, \underline{E}(\underline{r}) = 0$$

$\Rightarrow$ Die Gleichungen $\mathrm{div}\, \underline{E}(\underline{r}) = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$ und $\mathrm{rot}\, \underline{E}(\underline{r}) = 0$ bilden zusammen die Grundgleichungen der Elektrostatik!

II. 1.5. Poisson-Gleichung

Kombiniere die Gleichungen $\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$

und $\nabla \times \underline{E}(\underline{r}) = 0 \Leftrightarrow \underline{E}(\underline{r}) = -\nabla \phi(\underline{r})$

skalares elektrostatisches Potential

$$\Rightarrow \nabla \cdot \nabla \phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

Benutze $\underbrace{\nabla \cdot \nabla = \Delta}_{\text{Laplace-Operator}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta \phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}}$$ Poisson-Gleichung

Bemerkungen

a) Speziell für den Fall $\rho(\underline{r}) = 0$
(keine Ladungen) geht die
Poissongleichung über in die sog. <u>Laplace-Gleichung</u>

$$\Delta \phi(\underline{r}) = 0$$

b) Beachte folgende Implikation der Poisson-Gleichung:

nach unserer früheren Definition des Potentials galt:

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\underline{r}' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad (*)$$

Jetzt (nach Poisson)

$$\Delta_{\underline{r}} \Phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r}) \quad (1)$$

$$\overset{(*)}{=} \Delta_{\underline{r}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\underline{r}' \rho(\underline{r}') \, \Delta_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad (2)$$

Vergleiche (1) und (2)

$$\Rightarrow \Delta_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \overset{!}{=} -4\pi\,\delta(\underline{r}-\underline{r}') \quad !$$

II. 2. Feldverhalten an Grenzflächen

Bisher kennengelernt

Volumen-Ladungsdichte $\rho(\underline{r}) = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{q(\underline{r})}{\Delta V}$

mit ΔV: Volumenelement um $\underline{r}$

$q(\underline{r})$ Gesamtladung in ΔV

$$\Leftrightarrow \quad q = \int_{\Delta V} dV\, \rho(\underline{r})$$

(bzw. $q(\underline{r})$)

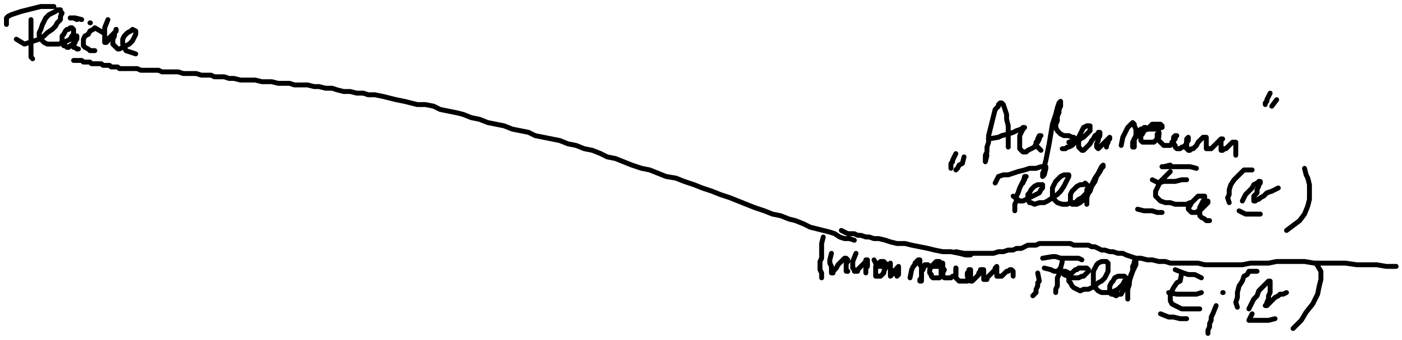
Betrachte jetzt geladene Fläche mit Oberflächen-Ladungsdichte $\sigma(\underline{r}) = \lim_{\Delta F \to 0} \frac{q(\underline{r})}{\Delta F}$

$\Rightarrow$ Flächenelement trägt die Gesamtladung

$$q = \int_{\Delta F} dF\, \sigma(\underline{r})$$

Frage: Wie verhält das elektrische Feld beim Durchgang durch eine solche Fläche?

(Motivation: z.B. Leitende Körper!)

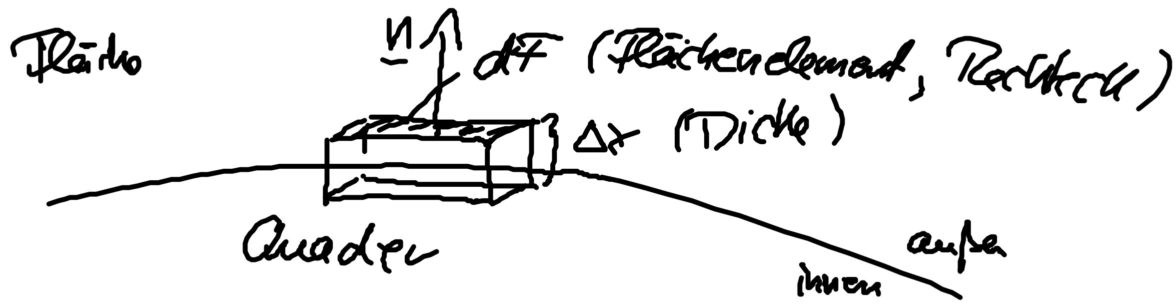


Annahmen:

- Die gesamte Ladung sei homogen über die gesamte Fläche verschmiert

d.h. $\sigma(\underline{r}) = \text{Const}$ auf Fläche

- Keine Ladungen im Innen- und Außenraum!



Betrachte getrennt die Normal- und die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes

i) Normalkomponente

Berechne $\displaystyle\underbrace{\int}_{\text{Quader-Oberfläche}} d\underline{F} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \overset{\text{Inhalt von dF}}{\overbrace{\Delta F}} \Big(\underline{E}_a(\underline{r}) \cdot \underline{n} - \underline{E}_i(\underline{r}) \cdot \underline{n} \Big)$

$+ \underbrace{\text{Beiträge} \sim \Delta x}$

Quader ist sehr klein!

vernachlässigbar, falls der Quader unendlich dünn!

Minuszeichen, da die Normalenvektoren auf der Ober- und Unterseite entgegengesetzt sind

Setze also: $\int\limits_{\text{Quader}} d\underline{F} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = \Delta F \left(\underline{E}_a(\underline{r}) - \underline{E}_i(\underline{r}) \right) \cdot \underline{n}$

<u>andererseits</u>:

$$\int\limits_{\text{Quader}} d\underline{F} \cdot \underline{E}(\underline{r}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Gauß'scher} \\ \text{Integralsatz}}}{=} \int\limits_{\text{Quader}} dV \; \mathrm{div}\, \underline{E}(\underline{r})$$

$$\underset{\text{Gauß'sches Gesetz}}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} \overbrace{\int\limits_{\substack{\text{Quader-} \\ \text{Volumen}}} dV \, \rho(\underline{r})}^{\text{Gesamtladung}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ladung ist nur} \\ \text{auf der Fläche!}}}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} \overbrace{\int dF \, \sigma(\underline{r})}^{\text{Gesamtladung}}$$

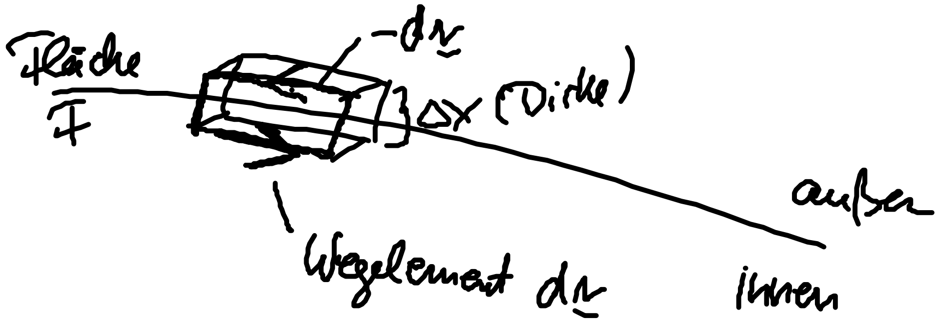
$$= \frac{1}{\varepsilon_0} \sigma \Delta F$$

Kombiniere diese beiden Resultate für den Fluß durch den Quader

$$\Rightarrow \boxed{\left(\underline{E}_a(\underline{r}) - \underline{E}_i(\underline{r}) \right) \cdot \underline{n} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Falls also die Flächenladungsdichte σ von Null verschieden ist, dann macht die Normal-Komponente, $\underline{E}(\underline{r})\cdot\underline{n}$, einen Sprung beim Durchgang durch die Fläche!

(ii) Tangential Komponente



Tangentialkomponente des Feldes ist $\underline{E}(\underline{r})\cdot d\underline{r}$

Wir benutzen

$$\mathrm{rot}\,\underline{E}(\underline{r})=0 \iff \oint d\underline{r}\cdot\underline{E}(\underline{r})=0$$

geschlossene Kurve

Wähle Weg auf der Quaderoberfläche, der die die interessierende Fläche F mit einschließt!

$$\oint_{\text{Kurve}} d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r}) \underset{\Delta x \to 0}{=} \underline{E}_i(\underline{r}) \cdot d\underline{r} - \underline{E}_a(\underline{r}) \cdot d\underline{r} \overset{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \underline{E}_i(\underline{r}) \cdot d\underline{r} = \underline{E}_a(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$$

$\Rightarrow$ Tangentialkomponente des elektrischen Feldes bleibt stetig — unabhängig von einer Flächenladungsdichte!

Folgerungen aus i) und ii) speziell für <u>Leiteroberflächen</u>

<u>Leiter</u>: Stoff mit frei beweglichen Ladungsträgern

Beispiele:

- Metalle (Festkörper): hier sind die Ladungsträger Elektronen in nicht vollständig gefüllten Energiebändern des Festkörpers

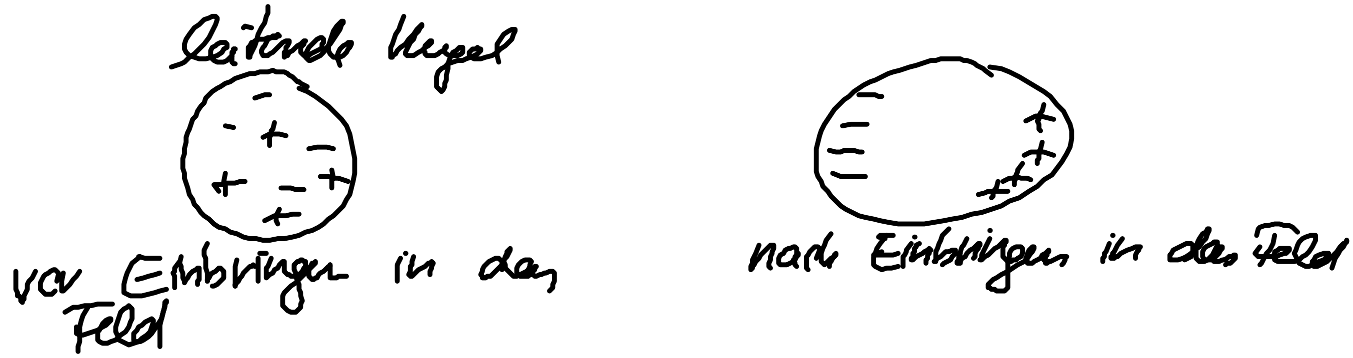
– Flüssigkeiten mit frei beweglichen Ionen
(Elektrolyte, z.B. $NaCl$ – Lösung)

Fokus hier in der VL: Festkörper (Metalle) mit fest definierten Oberfläche

Bringe diesen Leiter (mitsamt seiner Oberfläche) in ein elektrostatisches Feld

Annahme:

Im Leiter stellt sich ein Gleichgewichtszustand, in dem sich die frei beweglichen Ladungen in Ruhe befinden!



Gleichgewicht impliziert also

$$\underline{E}_i(\underline{r}) = 0$$

denn sonst würden Kräfte der Form $\underline{F} = q\,\underline{E}_i(\underline{r})$ auf die Ladungen wirken, und sie würden sich bewegen!