$\Rightarrow$ Falls die Flächenladungsdichte $\sigma \neq 0$, dann macht die Normalkomponente des elektrostat. Feldes einen <u>Sprung</u> beim Durchgang durch die Fläche!

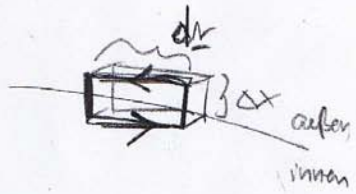
ii) Tangentialkomponente

Wir wissen:

$$\text{rot}\, \underline{E}(\underline{r}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \oint_{\text{geschlossene Kurve}} d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r}) = 0$$

Wähle Weg auf der Quaderoberfläche und betrachte Kurvenintegral



$$\oint d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r}) \underset{\Delta x \to 0}{=} \underline{E}_a(\underline{r}) \cdot d\underline{r} - \underline{E}_i(\underline{r}) \cdot d\underline{r}$$

$$\stackrel{!}{=} 0$$

$\Rightarrow$ <u>Tangentialkomponente bleibt stetig!</u>

Folgerungen aus i) und ii) speziell für Leiteroberflächen

Leiter: Stoff mit frei beweglichen Ladungsträgern

Beispiele:
- Metalle (Ladungsträger sind Elektronen in dem nicht vollständig gefüllten Valenzband des Festkörpers)
- Flüssigkeiten mit frei beweglich Ionen (Elektrolyte)

Fokussiere hier auf Festkörper (Metalle) mit fest definierten Oberflächen.

Bringe nun den Leiter in ein elektrostatisches (zeitunabhängiges) Feld ein

Annahme (plausibel):
Es stellt sich ein Gleichgewichtszustand ein, in dem sich die frei beweglichen Ladungen in Ruhe befinden (Bis zu diesem Gleichgewichtszustand kann das System kurz im Nichtgleichgewicht sein infolge von Bewegungen der Ladungsträger)

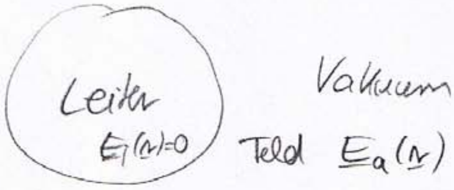
Das impliziert:

$$\boxed{\begin{array}{l} \underline{E}_i(\underline{r}) = 0 \\ \Leftrightarrow \Phi_i(\underline{r}) = \text{const} \end{array}} \quad !!$$

Denn sonst würde im Innern Kräfte der Form $\underline{F}_k = q_k \underline{E}_i(\underline{r})$ (k Teilchenindex) wirken!!

Beachte: Aus $\underline{E}_i(\underline{r})=0$ folgt sofort $\phi_i(\underline{r})=\text{const.}$

Was passiert an der Grenzfläche Leiter – Vakuum?



Wir wissen:

$$\underline{E}_a(\underline{r})\Big|_{\text{tangential}} = \underline{E}_i(\underline{r})\Big|_{\text{tangential}} = 0$$

$$\underline{E}_a(\underline{r})\cdot\underline{n} = \underbrace{\underline{E}_i(\underline{r})\cdot\underline{n}}_{\text{hier Null}} + \frac{\sigma(\underline{r})}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

⇒ Das elektrische Feld im Außenraum, $\underline{E}_a(\underline{r})$, steht senkrecht auf der Leiteroberfläche!

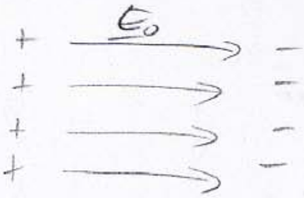
Weitere Folgerung:

Auf der Leiteroberfläche muß sich eine Flächenladungsdichte $\sigma(\underline{r})$ gebildet haben

Man sagt: Das externe Feld influenziert Ladungen an der Leiteroberfläche!

Beispiel leitende Kugel:

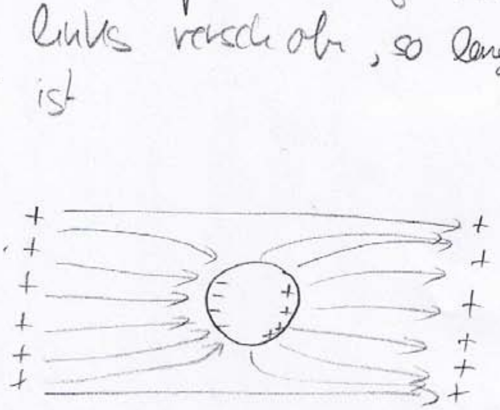
Betrachte zunächst leeren Raum ohne Kugel



homogenes, statisches Feld $\underline{E}_0$

Einbringen der leitenden Kugeln
→ Im Innern der Kugel werden positive Ladungen nach rechts, negative nach links verschoben, so lange bis das Innere feldfrei ist

Resultierende Situation.



Totales Feld außen ≙
Überlagerung des Feldes $\underline{E}_0$ und dem Feld der influenzierten Oberflächenladungen (Dipolfeld!)

generell:

Durch Einbringen von Leitern werden elektrische Felder (bzw. Potentiale) deformiert!

II.3. Randwertprobleme in der Elektrostatik

<u>Grundproblem:</u>

Lösung der Poisson-Gleichung

$$\left.\begin{array}{c}\Delta\Phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r}) \\ \text{(bzw. der Laplace-Gl. } \Delta\Phi = 0\text{)}\end{array}\right\}\ \text{Diff. gleichung zweiter Ordnung}$$

Beachte: Die Lösung für $\Phi(\underline{r})$ wird erst <u>eindeutig</u> durch die Vorgabe von Randbedingungen !

Bisher als Lösung kennengelernt (Kap. II.1.3)

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V d\underline{r}'\,\frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (*)$$

Das ist die <u>allgemeine</u> Lösung ! Nur dann gültig, falls <u>keine</u> Ränder / Grenzflächen in V vorliegen, und falls $\rho(\underline{r})$ bekannt im ganzen Raum!

<u>Motivation hier</u>

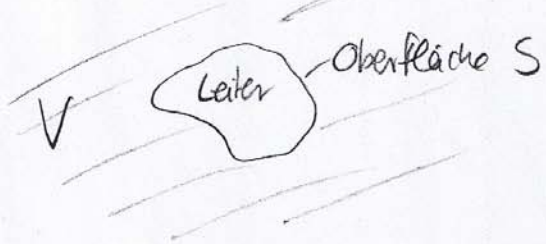
In der Praxis hat man es meist mit <u>endlichen</u> Volumina zu tun, die durch Randbedingungen gekennzeichnet sind (d.h. $\rho(\underline{r})$ oft nicht überall bekannt)

⇒ Dann ist (*) nicht mehr geeignet

— die Poisson-Gleichung gilt aber immer noch!

Beispiel:

Im Raum befindet sich ein Leiter



Wir wissen bereits: Im Leiter gilt $\underline{E}(\underline{r}) = 0$

$\Leftrightarrow \phi(\underline{r}) = \text{const}$

$\Rightarrow \phi(\underline{r}) = \phi_S = \text{const}$ auf der Leiteroberfläche

Dadurch wird das vor Einbringen des Leiters bestehende Feld in V gestört!! (Feldlinien müssen senkrecht stehen)

mathematisch:

Dirichlet'sches Randwertproblem!

Dirichlet'sche Randbedingungen:

$$\Phi(\underline{r})\Big|_S = \Phi_S \quad \text{gegeben}$$

$$\Phi(\underline{r}) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \quad \text{"}$$

Gesucht: $\Phi(\underline{r})$ in V als Lösung von $\Delta\Phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$

man kann zeigen:

Das Dirichlet'sche Problem hat (bis auf eine Konstante) eine eindeutige Lösung für $\Phi(\underline{r})$!

Weitere mögliche Randbedingungen:

- von Neumann: $\underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial n}\Big|_S}_{\text{Ableitung des Potentials in Richtung des Normalenvektors}}$ gegeben

- Mischungen aus Dirichlet / von Neumann

Fokussiere hier auf <u>Dirichlet-Probleme</u>

Beispiel (von Neumann)

Flächenladungsdichte gegeben auf Leiter ($E_i = 0$) $\Rightarrow$ $\underline{E}_a(\underline{r})\cdot\underline{n} = \frac{\sigma(\underline{r})}{\varepsilon_0}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{\partial\Phi_a(\underline{r})}{\partial n} = \frac{\sigma(\underline{r})}{\varepsilon_0}$

Definiere dazu die sogenannten Green'schen Funktionen

Diese Definition geschieht über die Differentialgleichung

$$\Delta_{\underline{r}}\, G(\underline{r},\underline{r}') = -\frac{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}{\varepsilon_0} \qquad (*)$$

Man sieht:

Green'sche Funktionen sind also Lösungen der Poisson-Gleichung für eine Punktladung!

↳ mit $q = 1$ und Lokalisierung bei $\underline{r} = \underline{r}'$

Wir hatten bereits gesehen (s. Kap. , Übung)

$$\underbrace{\Delta_{\underline{r}}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)}_{\text{Potential der Punktladung}} = -\frac{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}{\varepsilon_0}$$

Potential der Punktladung $\rightarrow$ entspricht einer Green'schen Funktion!

allgemeiner kann man schreiben:

$$G(\underline{r},\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + f(\underline{r},\underline{r}')$$

$$\text{mit} \quad \Delta_{\underline{r}}\, f(\underline{r},\underline{r}') = 0$$

<u>Interpretation</u>: $f(\underline{r},\underline{r}')$ ist ein Zusatzpotential, das der Laplace-Gleichung genügt! ($\rightarrow$ Methode der Bildladungen, später!)

und noch allgemeiner:

- Green'sche Funktionen sind Lösungen der Poisson-Gleichung für eine Punktladung
- Ihre genauen Eigenschaften hängen von der Art der Randbedingungen ab

Idee:
Benutze nun die Green'sche Funktion zur Aufstellung einer Gleichung für $\Phi(\underline{r})$ in Anwesenheit von Rändern in V!

Ausgangspunkt:
Green'scher Satz für 2 skalare Felder $\varphi(\underline{r})$, $\psi(\underline{r})$

$$\int_V d\underline{r}\,\left(\varphi\,\Delta_{\underline{r}}\psi - \psi\,\Delta_{\underline{r}}\varphi\right) = \int_{F_V} d\underline{F}\left(\varphi\,\nabla_{\underline{r}}\psi - \psi\,\nabla_{\underline{r}}\varphi\right)$$

setze nun:

$$\varphi(\underline{r}) \to \Phi(\underline{r})$$
$$\psi(\underline{r}) \to G(\underline{r},\underline{r}')$$
$$F_V \to S$$

und beachte, daß $\Delta_r \psi = \Delta_r G = -\frac{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}{}$; $\Delta_r \varphi = \Delta_r \psi = -\frac{\rho(\underline{r})}{}$

Einsetzen (und Wechsel der Integrationsvariable $\underline{r} \to \underline{r}'$

$\Rightarrow$

$$\int_V d\underline{r}'\,\Phi(\underline{r}')\left(-\frac{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}{\varepsilon_0}\right) - \int_V d\underline{r}'\,G(\underline{r},\underline{r}')\left(-\frac{\rho(\underline{r}')}{\varepsilon_0}\right)$$

$$= \oint_S dF'\left(\Phi(\underline{r}')\frac{\partial G(\underline{r},\underline{r}')}{\partial n'} - G(\underline{r},\underline{r}')\frac{\partial \Phi}{\partial n'}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(\underline{r}) = \int d\underline{r}'\,\rho(\underline{r}')\,G(\underline{r},\underline{r}') - \varepsilon_0 \oint_S dF'\left(\Phi(\underline{r}')\frac{\partial G(\underline{r},\underline{r}')}{\partial n'} - G(\underline{r},\underline{r}')\frac{\partial \Phi}{\partial n'}\right)}$$

Man sieht: $\Phi(\underline{r})$ ist voll durch $\rho(\underline{r}')$ und $G(\underline{r},\underline{r}')$ bestimmt!

noch zu zeigen: Der oben gegebene Ausdruck für $\Phi(\underline{r})$ erfüllt die Poisson-Gleichung!

$\rightarrow$ Übung

Spezifiziere nun:

- <u>Dirichlet-Randbedingung</u>

$\Leftrightarrow \ \phi$ ist auf S bekannt $\left(\phi(\underline{r})\big|_{\underline{r} \in S} = \phi_S \right)$

<u>Strategie</u>: Wähle $G(\underline{r}, \underline{r}')$ so (bzw. wähle das Zusatzpotential $f(\underline{r}, \underline{r}')$ so), daß

$$G(\underline{r}, \underline{r}') = 0 \quad \text{falls } \underline{r} \in S$$

$$\Rightarrow \phi(\underline{r}) = \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}')\, G(\underline{r}, \underline{r}') - \varepsilon_0 \oint_S dF' \left(\phi(\underline{r}') \frac{\partial G(\underline{r}, \underline{r}')}{\partial n} \right)$$

- <u>van Neumann-Randbedingung</u>

$\Leftrightarrow \ \frac{\partial \phi(\underline{r})}{\partial n}$ auf S bekannt

Naheliegende Idee:
Wähle G so, daß $\oint dF' \left(\phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) = 0$

Dies geht aber nicht!
Grund: Es gilt immer $\underbrace{\int d\underline{r}'\, \Delta_{\underline{r}'} G(\underline{r}, \underline{r}')}_{A} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int d\underline{r}'\, \delta(\underline{r} - \underline{r}')$

$= -\frac{1}{\varepsilon_0}$ falls $\underline{r} \in V$