Wh: Dirichlet: $\phi(\underline{r})$ ist auf Rand bekannt

von-Neumann: $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ " " " bekannt

$$\phi(\underline{r}) = \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}')\, G(\underline{r},\underline{r}') - \varepsilon_0 \oint_S dF' \left(\phi(\underline{r}') \frac{\partial G(\underline{r},\underline{r}')}{\partial n'} - G(\underline{r},\underline{r}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} \right)$$

mit $G(\underline{r},\underline{r}')$ löst die Poissongleichung für eine Einheits-Punktladung $\Delta_{\underline{r}} G = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$

Vorteil f. Dirichlet:

ϕ auf S bekannt

Wähle $G(\underline{r},\underline{r}')$ so, daß $G(\underline{r},\underline{r}') = 0$ auf dem Rand

$$\phi(\underline{r}) = \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}')\, G(\underline{r},\underline{r}') - \varepsilon_0 \oint_S dF' \left(\phi(\underline{r}') \frac{\partial G(\underline{r},\underline{r}')}{\partial n} \right)$$

von-Neumann-Randbedingung

~~Wähle~~ naheliegende Idee: Wähle $G(\underline{r},\underline{r}')$ so, daß
$\oint dF' \left(\phi(\underline{r}') \frac{\partial G}{\partial n'} \right) = 0$

Das geht so einfach aber nicht!

Grund:

betrachte $\int d\underline{r}' \underbrace{\Delta_{\underline{r}} G(\underline{r},\underline{r}')}_{-\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')} = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int d\underline{r}' \, \delta(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}$

andererseits:

$$\int d\underline{r}' \, \Delta_{\underline{r}'} G(\underline{r},\underline{r}') = \int d\underline{F}' \, \overbrace{\nabla_{\underline{r}}}^{\text{Gradient}} G(\underline{r},\underline{r}') = \int dF' \frac{\partial G(\underline{r},\underline{r}')}{\partial n'}$$

div grad

Gaußscher Integralsatz

Kombiniere

$$\Rightarrow \int dF' \frac{\partial G(\underline{r},\underline{r}')}{\partial n'} \overset{!}{=} -\frac{1}{\varepsilon_0} \neq 0$$

$\Rightarrow$ Man kann die Normalenableitung von G nicht einfach Null setzen!

Wähle stattdessen:

$$\frac{\partial G(\underline{r},\underline{r}')}{\partial n'} = -\frac{1}{\varepsilon_0 \underbrace{S}_{\text{Flächeninhalt}}}$$

$$\underbrace{\oint dF'\, \phi(\underline{r}')\frac{\partial G(\underline{r},\underline{r}')}{\partial n'}}_{\text{interessierender Term}} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\frac{1}{S}\oint dF'\, \phi(\underline{r}')}_{\text{Konstante}}$$

Die Konstante entspricht dem Mittelwert des Potentials

Einsetzen:

$$\phi(\underline{r}) = \int d\underline{r}\, \rho(\underline{r}')\, G(\underline{r},\underline{r}') + \varepsilon_0 \oint_S dF'\, G(\underline{r},\underline{r}')\underbrace{\frac{\partial \phi(\underline{r}')}{\partial n'}}_{\substack{\text{bekannt} \\ \text{(von Neumann!)}}} + \underbrace{\varphi_0}_{\substack{\frac{1}{S}\oint_S dF'\, \phi(\underline{r}') \\ \text{physikalisch uninteressant!}}}$$

Zur eigentlichen Konstruktion der Green'schen Funktion

Ausgangspunkt:

$$G(\underline{r},\underline{r}') = \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\text{Punktladungspotential}} + \underbrace{f(\underline{r},\underline{r}')}_{\text{Zusatzpotential}}$$

Zusatzpotential mit $\Delta_{\underline{r}} f(\underline{r},\underline{r}') = 0$ (Laplace-Gl.!) $\forall \underline{r} \in V$!

somit:

$$\Delta_{\underline{r}} G(\underline{r},\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0}\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

Physikalische Interpretation des Zusatzpotentials

$f(\underline{r},\underline{r}')$ ist das Potential von Ladungen außerhalb des interessierenden Volumens V!

Diese Ladungen nennt man typischerweise "Bildladungen" oder "Spiegelladungen"

Idee (für Dirichlet'sche Randbed.)

„Bringe Bildladungen so an", daß die „Randbedingung $G(\underline{r},\underline{r}')=0 \;\forall\, \underline{r} \in S$"

Randfläch

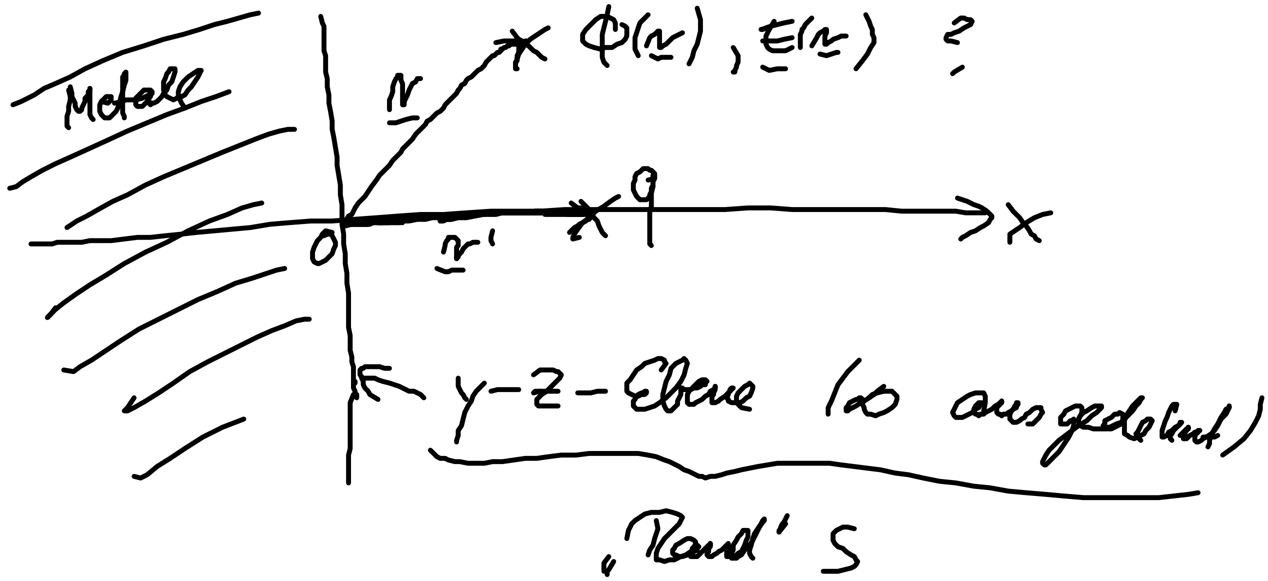
$\Longrightarrow$ „Bildladungsmethode"

Das heißt:

Wir bilden das Problem eines Systems mit "echten Ladungen und Rändern ab auf das Problem "echte Ladung + Spiegelladung ohne Rand!"

Beispiel: (Standard, aber dient der Illustration)

Punktladung vor leitender (metallischen) Wand



Interessierendes Volumen: Halbraum mit $x>0$

Wir wissen:

Für $x<0$ gilt $\underline{E}=0$ und $\phi=\text{const}$

Nehme an, daß $\phi(\underline{r})=0 \quad \forall x \leq 0$

$\Rightarrow$ auch $\phi=0$ auf S

Dirichlet'sches Problem!

$$\phi=0 \quad \text{auf } S$$

$$\phi(\underline{r}) = \int_V d\underline{r}'\, G(\underline{r},\underline{r}')\, \rho(\underline{r}')$$

$$- \varepsilon_0 \cancel{\oint dF'\, \underbrace{\phi(\underline{r}')}_{\text{nach Voraussetzung hier Null}} \frac{\partial G}{\partial n}}$$

Suche $G(\underline{r},\underline{r}')$ so, daß $G=0$ auf S!

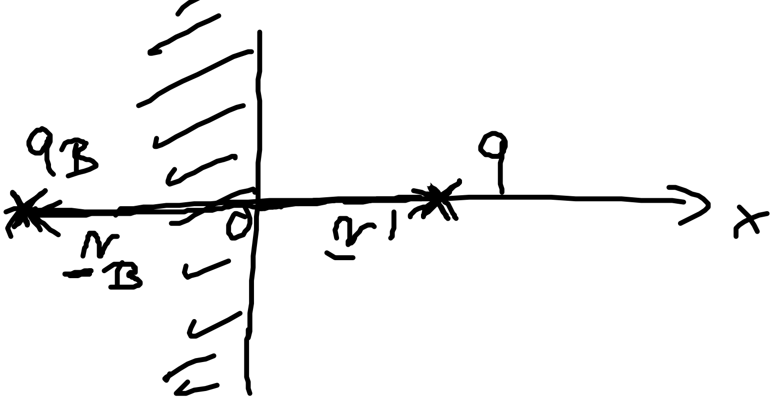
Ansatz für die Green'sche Funktion im vorliegenden Fall?

Wir wissen: Das Feld $\underline{E}(\underline{r})$ muß senkrecht auf S stehen!

(denn:
- $\underline{E}=0$ für $x<0$
- Tangentialkomponente bleibt stetig bei S
- Normalkomponente macht Sprung!)

Man muß die Bildladung(en) entsprechend anbringen!

$$G(\underline{r},\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r}-\underline{r}'|} + \frac{q_B/q}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r}-\underline{r}_B|} \quad (*)$$



mit $\underline{r}_B$: Ort im Halbraum $x<0$

q_B : Spiegelladung!

Aus Symmetriegründen ist sofort klar:
q_B muß auch auf der x-Achse liegen!

$$\underline{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{r}_B = \begin{pmatrix} x_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(\underline{r},\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{(x-x')^2+y^2+z^2}} + \frac{q_B/q}{\sqrt{(x-x_B)^2+y^2+z^2}}$$

Fordere $G(\underline{r},\underline{r}') = 0$ auf S, d.h. $\forall \underline{r} = (0,y,z)$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{\sqrt{(-x')^2+y^2+z^2}} + \frac{q_B/q}{\sqrt{(-x_B)^2+y^2+z^2}}$$

erfüllbar durch $q_B = -q$, $x_B = -x'$, d.h. $\underline{r}_B = -\underline{r}'$

Einsetzen in ⊛

$$\Rightarrow G(\underline{r},\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r}-\underline{r}'|} \underbrace{- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}+\underline{r}'|}}_{f(\underline{r},\underline{r}')}$$

!

Potential:

$$\Phi(\underline{r}) = \int d\underline{r}'' \, G(\underline{r},\underline{r}'') \underbrace{\rho(\underline{r}'')}_{q\,\delta(\underline{r}''-\underline{r}')}$$

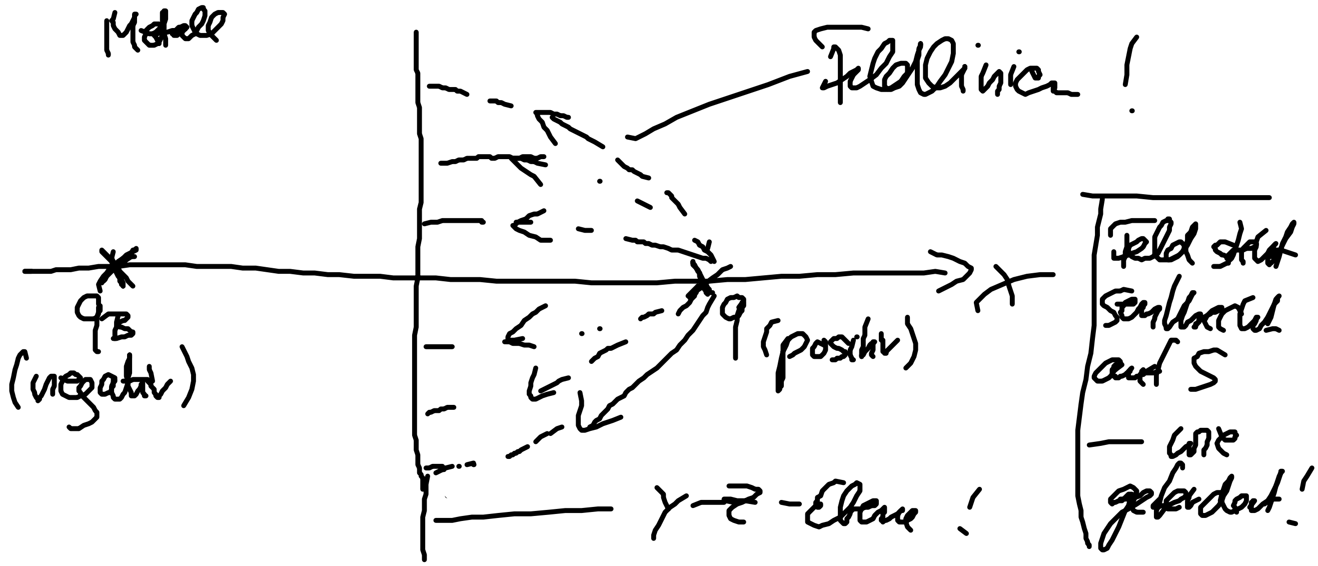
$$= q\, G(\underline{r},\underline{r}')$$

Ort der ersten Punktladung!

$$\Rightarrow \underbrace{\Phi(\underline{r})}_{\text{Potential in } V} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} - \frac{1}{|\underline{r}+\underline{r}'|}\right)$$

Summe zweier Punktladungspotential

Feld: $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla_{\underline{r}} \Phi(\underline{r})$



Berechnung der influenzierten Ladung:

Wir wissen (aus dem Gauß'schen Satz)

$$\underline{E}_a(\underline{r})\cdot\underline{n} - \underline{E}_i(\underline{r})\cdot\underline{n} = \frac{\sigma(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

Flächen-Ladungsdichte

hier: $\underline{n} = \hat{\underline{e}}_x$

Einheitsvektor in x-Richtung

$\underline{E}_i(\underline{r})$: Feld für $x<0$

$\Rightarrow \underline{E}_i = 0$

$\underline{E}_a(\underline{r})$: Feld im interessierenden Volumen V

Wir haben also:

$$\underline{E}_a(\underline{r})\cdot\hat{\underline{e}}_x\Big|_S = \underline{E}(\underline{r})\cdot\hat{\underline{e}}_x\Big|_S$$

$$= \frac{\sigma(\underline{r})}{\varepsilon_0}\Big|_{\underline{r}\in S}$$

benutze diese Gleichung zur Berechnung von $\sigma(\underline{r})$

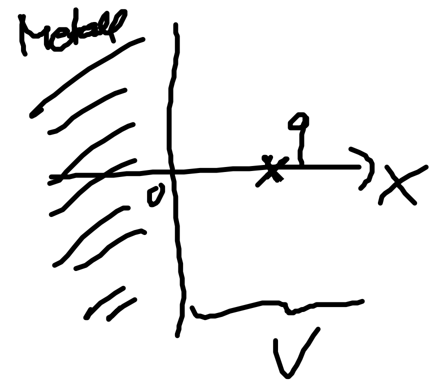
(denn $\underline{E}(\underline{r})$ ist ja jetzt bekannt!

Ergebnis:

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\sigma(y,z) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{(-x')}{\sqrt{x'^2+y^2+z^2}^{\,3}}$$

Daraus die influenzierte Gesamtladung auf S

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}dz\ \sigma(y,z)$$



$$= \dots = -q \quad !$$

Die influenzierte Ladung kompensiert also gerade die echte Ladung q !

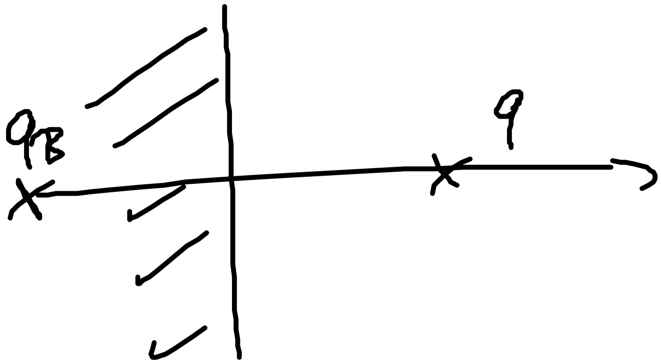
Interpretation:
Vom Halbraum $x<0$ (d.h. vom Metall) aus gesehen, ist das Volumen V ladungsneutral

– Konsistent mit der Tatsache, daß $\underline{E}=0$ im Halbraum $x<0$!

Nachbemerkung zu Randwertproblemen

Häufig benutzt zur Lösung der Poisson-Gleichung und von Randwertproblemen
orthogonale Funktionen bzw. Entwicklungen darin

– Kugelflächenfunktionen (bekannt aus der QM) $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$
– Legendrepolynome $P_l(\cos\vartheta)$
– Fourierreihen (diskret, kontinuierlich)



II.4. Die elektrostatische Feldenergie

Kap II.1.3.

Die potentielle Energie einer Ladung q im elektrostatischen Potential $\phi(\underline{r})$ ist gegeben durch

$$W(\underline{r}) = q\,\phi(\underline{r})$$

Alternative Interpretation:

$W(\underline{r})$ ist die Arbeit, die man aufwenden muß,

um die Ladung aus "dem Unendlichen", wo $\phi = 0$ ist, zum Ort $\underline{r}$ zu bringen

Betrachte nun System aus Punktladungen q_i, $i = 1, \dots, N$

Analog zur Einzelladung:

Potentielle Energie W^S des Gesamtsystems aus allen N Punktladungen

$\hat{=}$ Arbeit, um die q_i aus dem Unendlichen an die Ort $\underline{r}_i$ zu bringen

S für "System"

Anfangssituation: alle Ladungen unendlich weit voneinander entfernt $\Rightarrow$

Für diskrete (Punkt-) Ladungen:

$$W^S = W_1 + W_2 + \dots + W_N$$

mit W_1: Arbeit, um q_1 nach $\underline{r}_1$ zu bringen