Wh:

Betrachte System aus N Punktladungen

Potentielle Energie W^S des Gesamtsystems

$\hat{=}$ Arbeit, die man aufwenden muss, um die Ladungen q_i aus dem Unendlichen zu den Orten $\underline{r}_i$ zu bringen

Anfangssituation: Raum ist zunächst (vor Einbringen der Ladungen) feldfrei $\Rightarrow \phi^{\text{Anfang}} = 0$

$$W^S = W_1 + W_2 + \dots + W_N$$

Summe aller Arbeiten, um die q_i heranzuführen!

W_1: Arbeit, um q_1 nach $\underline{r}_1$ zu bringen

$W_1 = 0$, da $\phi^{\text{Anfang}} = 0$

W_2: Arbeit, um q_2 in dem von q_1 erzeugten Feld nach $\underline{r}_2$ zu bringen

$$W_2 = q_2 \underbrace{\phi_1(\underline{r}_2)}$$

Potential, welches von q_1 bei $\underline{r}_2$ erzeugt wird

$$W_2 = q_2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r}_1 - \underline{r}_2|}$$

analog:

$$W_3: \; q_3\left(\Phi_1(\underline{r}_3) + \Phi_2(\underline{r}_3)\right) = q_3 \sum_{j=1}^{2} \frac{q_j}{|\underline{r}_3 - \underline{r}_j|} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

$$W_N = q_N \sum_{j=1}^{N-1} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r}_N - \underline{r}_j|}$$

Gesamtenergie

$$W^S = \sum_{i=1}^{N} W_i = \sum_{i=2}^{N} W_i$$

$$= \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} \underbrace{\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r}_i - \underline{r}_j|}}_{w_{ij}} \qquad *$$

Beachte:

$$w_{ij} = w_{ji}$$

Damit folgt:

$$\boxed{W^S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r}_i - \underline{r}_j|}} \qquad *$$

keine Diagonalterme!

Verallgemeinerung auf kontinuierliche Ladungsverteilungen

$$\text{ersetze } \sum_i q_i \longrightarrow \int d\underline{r}\, \rho(\underline{r})$$

Damit ergibt sich

$$\boxed{W = \frac{1}{2} \int d\underline{r} \int d\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r})\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|\, 4\pi\varepsilon_0}}$$

Beachte:
Im Unterschied zur Formel für W_S wird in W über alle Beiträge "summiert"; Beiträge der Wechselwirkung

.. von Ladungen mit sich selbst werden nicht ausgeschlossen!

$\longrightarrow$ "Selbstenergien"

Dies sieht man, wenn man folgendes annimmt.

$$\rho(\underline{r}) = \sum_{i=1}^{N} q_i\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} q_i q_j \int d\underline{r} \int d\underline{r}' \frac{\delta(\underline{r}-\underline{r}_i)\,\delta(\underline{r}'-\underline{r}_j)}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r}_i - \underline{r}_j|}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\underline{r}_i - \underline{r}_j|} \neq W^S \quad !!$$

hier treten auch Diagonalterme auf! Dazu später.

Zurück zum Ausdruck für W
(für kontinuierlicher Verteilung)

Ziel: Umschreiben, daß Potential bzw. Feld auftaucht

$$W = \frac{1}{2}\int d\underline{r}\int d\underline{r}'\,\frac{\rho(\underline{r})\rho(\underline{r}')}{4\pi\varepsilon_0\,|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

benutze: $\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}'\,\frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

$$= \frac{1}{2}\int d\underline{r}\;\rho(\underline{r})\,\Phi(\underline{r})$$

benutze: $\Delta_{\underline{r}}\Phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow W = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int d\underline{r}\;\Delta_{\underline{r}}\Phi(\underline{r})\,\Phi(\underline{r})$$

benutze

$$\Delta\Phi\cdot\Phi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi\cdot\Phi$$
$$= \operatorname{div}(\operatorname{grad}\Phi\cdot\Phi) - \operatorname{grad}\Phi\cdot\operatorname{grad}\Phi$$

$$\Rightarrow W = -\frac{\varepsilon_0}{2}\int d\underline{r}\; \nabla\cdot\left(\nabla\phi(\underline{r})\cdot\phi(\underline{r})\right) + \frac{\varepsilon_0}{2}\int d\underline{r}\left(\nabla\phi(\underline{r})\right)^2$$

1. Integral: Gauß'sche Integralsatz

$$\int_V d\underline{r}\; \nabla\cdot\left(\nabla\phi(\underline{r})\cdot\phi(\underline{r})\right) = \int d\underline{F}\left(\phi(\underline{r})\nabla\phi(\underline{r})\right)$$

$$\int d\underline{F}\left(\phi(\underline{r})\nabla\phi(\underline{r})\right) /$$

(Oberflächenintegral "im Unendlichen")

Integrand:

$$\left.\begin{aligned} \phi &\sim \frac{1}{r} \\ \nabla\phi &\sim \frac{1}{r^2} \\ \text{Flächenelement } dF &\sim r^2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\sim \frac{1}{r} \\ &\overline{\text{verschwindet}} \\ &\text{für } r \to \infty! \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Oberflächenintegral verschwindet!

$$\Rightarrow W = \frac{\varepsilon_0}{2}\int d\underline{r}\left(\nabla\phi(\underline{r})\right)^2$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \int d\underline{r} \left(E(\underline{r})\right)^2$$

oder $$\boxed{\underbrace{W}_{\text{Feldenergie}} = \int d\underline{r}\, \underbrace{w(\underline{r})}_{\text{elektrostat. Energiedichte}} \quad \text{mit } w(\underline{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underline{E}(\underline{r})\right)^2}$$

Bemerkungen

a) W ist offensichtlich positiv definit !

— hieraus "sieht" man wieder die Tatsache, daß W Anteile der Selbstenergie enthält !

Denn für Punktladungen (Formel für W^S) könnte sich auch etwas Negatives ergeben

b) nochmal zum <u>Selbstenergieproblem</u>

i) Betrachte Punktladung bei $\underline{r} = 0$

$$\Rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\,\hat{\underline{e}}_r$$

$$\Rightarrow \underbrace{w(r)}_{\text{Energiedichte}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4}$$

Annahme: Es gibt nur diese eine Ladung!

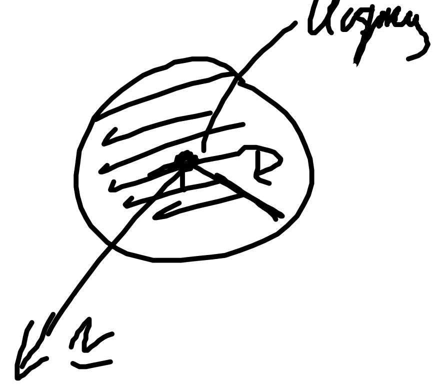
$$W = W^{\text{selbst}} = \int_V d\underline{r}\;\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{1}{r^4}$$

$$= 4\pi\,\frac{\varepsilon_0}{2}\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\underbrace{\int_0^\infty dr\;\underbrace{r^2\frac{1}{r^4}}_{r^{-2}}}_{\text{divergiert am unteren Rand } r\to 0\,!}$$

(ii) Betrachte homogen geladene Vollkugel bei $\underline{r}=0$ und Radius $R>0$

mit Schwerpunkts

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\hat{\underline{e}}_r \begin{cases} Q\,\frac{r}{R^3}, & r<R \\ \frac{Q}{r^2}, & r>R \end{cases}$$



man ~~selbst~~ findet:

$$W = W^{\text{selbst}} = \frac{3}{5}\,\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

endlich für alle $R>0$!

Divergenzen (für die Selbstenergie)
treten also nur für den
„pathologischen" Fall der Punktladung auf.

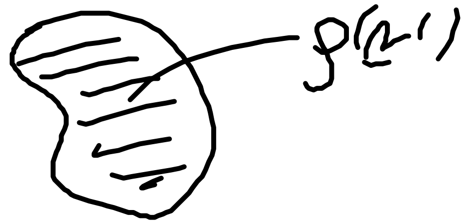
Reale, ausgedehnte Ladungsverteilung haben
endliche Selbstenergie

$\Rightarrow$ gesamte Feldenergie W bleibt endlich!

II.5. Multipolentwicklung

Betrachte eine <u>räumlich begrenzte</u> Ladungsverteilung $\rho(\underline{r}')$

(z.B. Molekül)



Potential (vernachlässige hier Ränder)

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

I.a. schwierig auszuwerten (außer bei sehr einfachen, symmetrischen Ladungsverteilungen)

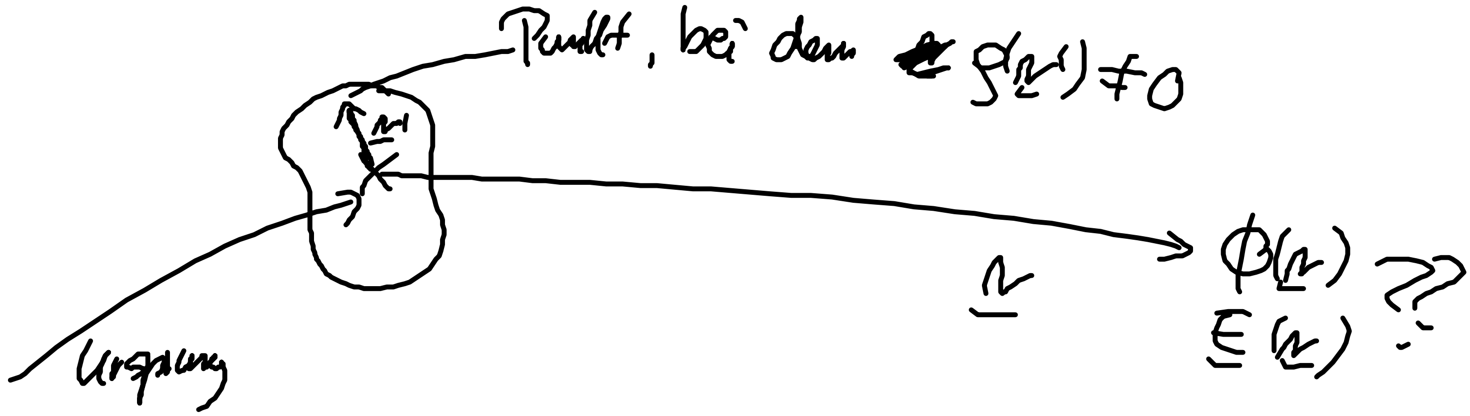
Häufig interessiert man sich nur für $\phi(\underline{r})$ bzw. $\underline{E}(\underline{r})$ weiter weg von der Ladungsverteilung

$\Longrightarrow$ Multipolentwicklung

Ausgangspunkt:

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}')\, \underbrace{\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\text{betrachte diese Fkt. genaue}}$$

Wir legen das Zentrum der Verteilung $\rho(\underline{r}')$ an den Ort $\underline{r}' = 0$



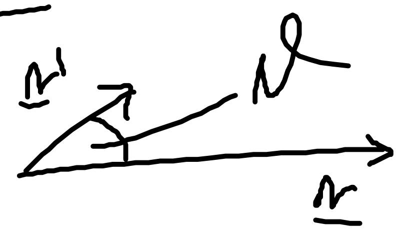
$\Rightarrow$ „Weit weg" von der Ladungsverteilung bedeutet, daß wir uns für Orte $\underline{r}$ interessieren, bei denen $\boxed{r \gg r'}$

Strategie:

Entwickle die Funktion $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

nach Potenzen von $\frac{r'}{r} \ll 1$

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{(\underline{r}-\underline{r}')^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-\underbrace{2rr'\cos\vartheta}_{2\underline{r}\cdot\underline{r}'}}}$$



$$= \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\vartheta}}$$

Taylorentwicklung in Potenzen von $\frac{r'}{r}$ (um $\frac{r'}{r}=0$)

man findet

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r}\left(\underbrace{1}_{P_0(\cos\vartheta)} + \underbrace{\cos\vartheta}_{P_1(\cos\vartheta)}\,\frac{r'}{r}\right.$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2}\left(3\cos^2\vartheta-1\right)}_{P_2(\cos\vartheta)}\left(\frac{r'}{r}\right)^2+\dots\Big)$$

Diese Entwicklungskoeffizienten sind Legendrepolynome!

$$\boxed{\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}=\frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\vartheta)}$$

~~mit~~ $\cancel{P_l(x)=\frac{1}{l!}\frac{\partial^l}{\partial t^l}(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}}$

$$P_l(x)=\frac{1}{l!}\left[\frac{\partial^l}{\partial t^l}(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_{t=0}$$

Elektrostatisches Potential:

$$\boxed{\begin{aligned}\Phi(\underline{r})&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}'\,\frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}\int d\underline{r}'\,\rho(\underline{r}')\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos\vartheta)\end{aligned}}$$

für Orte $\underline{r}$ außerhalb der Ladungsverteilung

Integral über das Gebiet, in dem $\rho(\underline{r}')\neq 0$!

Definiere: $$\boxed{Q_l = \int d\underline{r}'\, r'^l \rho(\underline{r}')\, P_l(\cos\theta)}$$

l-tes Multipolmoment der Verteilung!

$$\Rightarrow \boxed{\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} Q_l\, r^{-l-1}}$$

$$\left(= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q_0}{r} + \frac{Q_1}{r^2} + \frac{Q_2}{r^3} + \dots \right) \right.$$

Entwicklung des Potentials in Potenzen von $1/r$!!

„Multipolentwicklung"

<u>Betrachtung der führenden Terme</u>

• <u>$l=0$</u> "Monopolmoment"

$$Q_0 = \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}')$$ (da $P_0(x) = 1$)

Gesamtladung zur Verteilung $\rho(\underline{r}')$

damit: $Q_0 = 0 \hat{=}$ Verteilung ist insgesamt neutral!

Monopolpotential

$$\Phi^{(l=0)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{r}$$

Interpretation:

Weit weg von der Ladungs-
verteilung sieht diese aus
wie eine Punktladung mit Ladung Q_0 !

- $\underline{l=1}$:

$$Q_1 = \int d\underline{r}\; \rho(\underline{r}')\, r' \underbrace{\cos\alpha}_{P_1(\cos\alpha)}$$

benutze: $\cos\alpha = \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r\cdot r'}$

$$Q_1 = \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}')\, \frac{\underline{r}'\cdot\underline{r}}{r}$$

Definiere:

$$\boxed{\underline{p} = \int d\underline{r}' \, \rho(\underline{r}') \, \underline{r}'}$$

Vektor!

Dipolmoment der Ladungsverteilung

$$\Rightarrow \quad Q_1 = \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r} = \underline{p} \cdot \hat{\underline{r}}$$

Einheitsvektor in $\underline{r}$-Richtung

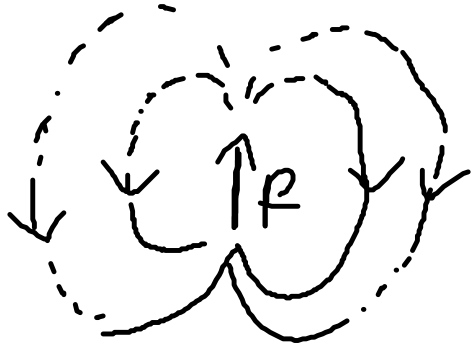
Zugehöriges Potential: (Dipolpotential)

$$\phi^{(l=1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\underline{p} \cdot \underline{r}}{r^3} \sim \frac{1}{r^2}$$

Wichtigster Term für insgesamt neutrale Körper!

$$\underline{E}^{(l=1)}(\underline{r}) = -\nabla_{\underline{r}} \phi^{(l=1)}(\underline{r})$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} \left(3(\underline{p} \cdot \underline{r})\underline{r} - r^2 \underline{p} \right)$$



Dipolfeld!

(wie beim magnetischen Dipol!)

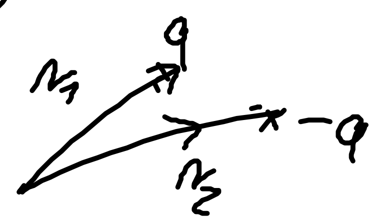
Beispiel:

2 Punktladungen $q_1 = q$, $q_2 = -q$ bei $\underline{r}_1, \underline{r}_2$

$$\rho(\underline{r}) = q\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_1) - q\,\delta(\underline{r}-\underline{r}_2)$$

Monopol

$$Q_0 = \int d\underline{r}'\,\rho(\underline{r}') = q - q = 0$$



Dipolmoment:

$$\underline{p} = \int d\underline{r}'\,\rho(\underline{r}')\,\underline{r}' = q(\underbrace{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}_{\text{Verbindungsvektor!}})$$