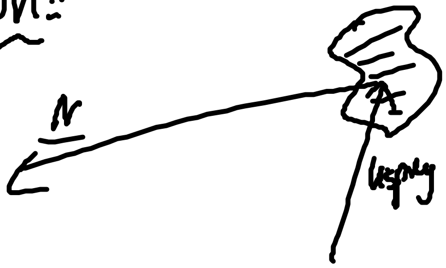
Wh.:



$\rho(\underline{r}')$

beliebig lokalisiert im Raum

Frage: Potential / Feld weit weg von der Ladungsverteilung?

Strategie: $$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\underline{r}' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

entwickle $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ in Potenzen von $\frac{r'}{r} \ll 1$

Resultat:
$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} Q_l \, r^{-l-1}$$

Entwicklung in Potenzen von $1/r$ ! mit $\underset{\text{Multipole}}{Q_l} = \int d\underline{r}' \, r'^l \rho(\underline{r}') \underset{\text{Legendre-Pol.}}{P_l(\cos\theta)}$

$l=0$ Monopol

$$\underset{\text{Gesamtladung}}{Q_0 = \int d\underline{r}' \, \rho(\underline{r}')}, \quad \Phi^{(l=0)}(\underline{r}) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

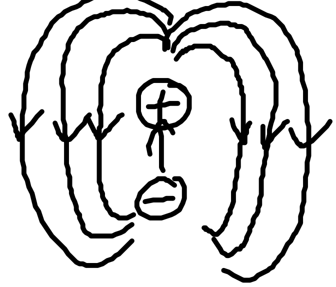
$\underset{\sim}{l=1}$: $\quad Q_1 = \dfrac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r}$ $\qquad \underline{p} = \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}')\, \underline{r}'$

elektrisches Dipolmoment (Vektor!)

$$\phi^{(l=1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3}$$

$$\underline{E}^{(l=1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5}\left(3(\underline{p}\cdot\underline{r})\underline{r} - r^2\underline{p}\right)$$

Winkelabhängig!




## Höhere Beiträge in der Multipolentwicklung:

$\underset{\sim}{l=2}$: $\quad Q_2 = \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}')\, r'^2\, P_2(\cos\vartheta)$

$$= \ldots = \frac{1}{2r^2} \sum_{kl} Q_{kl}\, x_k x_l$$

$k, l = 1,2,3$
$x_k, x_l$: Komponenten von $\underline{r}$

$$\text{mit } Q_{kl} = \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}') \left(3x_k' x_l' - r'^2 \delta_{kl}\right)$$

„Quadrupoltensor"

Eigenschaften: (→ Übung!)

- spurlos, d.h. $Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$
- symmetrisch, d.h. $Q_{kl} = Q_{lk}$

Der Tensor $Q_{kl}$ hat (nur) fünf unabhängige Komponenten!

Potential:

$$\phi^{(l=2)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3} Q_2$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^5}\sum_{kl} Q_{kl}\, x_k x_l$$

$$\sim \frac{1}{r^3} \quad \text{für große Abstände}$$

Zusammenfassung:

Potential weit weg von der Ladungsverteilung

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_0}{r} + \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5}\sum_{kl} Q_{kl}\, x_k x_l + \dots\right)$$

## II.6. Wechselwirkung einer Ladungsverteilung mit einem äußeren Feld

Wir hatten in Kap. II.4

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}\int d\underline{r}'\,\frac{\rho(\underline{r})\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{2}\int d\underline{r}\,\rho(\underline{r})\phi(\underline{r})$$

Energie einer Ladungsverteilung in dem durch diese Ladungsverteilung erzeugten Potential

Frage nun:
Was ist die Energie einer Verteilung $\rho(\underline{r})$ in einem äußeren (externen) Potential $\phi^{ext}(\underline{r})$, das durch eine entsprechende externe Ladungsverteilung erzeugt wurde?

Definition:

$$W_{ext} = \int d\underline{r}\,\rho(\underline{r})\,\phi^{ext}(\underline{r})$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}\int d\underline{r}'\,\frac{\rho(\underline{r})\rho^{ext}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$


Idee:

- $\rho(\underline{r})$ lokalisiert um den Ursprung ($\underline{r}=0$)
- In dem Gebiet, in welchem $\rho(\underline{r}) \neq 0$ ist, variiert das durch $\rho^{ext}$ erzeugte Potential nur langsam mit $\underline{r}$!

(Idee dahinter: $\rho^{ext}$ ist sehr weit weg von $\rho$ $\Longrightarrow$ $\phi^{ext}$ ändert sich in der Nähe des Ursprungs nur langsam)

Taylorentwicklung von $\phi^{ext}(\underline{r})$ um $\underline{r}=0$ machen!

$$\phi^{ext}(\underline{r}) = \underbrace{\phi^{ext}(\underline{r}=0)}_{const} + \underline{r}\cdot\left(\nabla\phi^{ext}(\underline{r})\right)_{\underline{r}=0} + \frac{1}{2}\left(\underline{r}\cdot\nabla\right)^2\phi^{ext}(\underline{r})\Big|_{\underline{r}=0} + \ldots \qquad (**)$$

2. Term in (**)

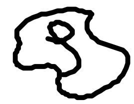
$$\underline{r}\cdot\left(\nabla\phi^{ext}\right)_{\underline{r}=0} = -\underline{r}\cdot\underline{E}^{ext}(\underline{r}=0)$$

3. Term:

$$\frac{1}{2}(\underline{r}\cdot\nabla)^2\,\phi^{ext}(\underline{r})\Big|_{\underline{r}=0} = \frac{1}{2}\sum_k\sum_l x_k x_l \underbrace{\frac{\partial^2\phi^{ext}(\underline{r})}{\partial x_k\,\partial x_l}\Big|_{\underline{r}=0}}_{-\frac{\partial E_k^{ext}}{\partial x_l}\big|_{\underline{r}=0}}$$

benutze nun noch, dass

$\nabla\cdot\underline{E}^{ext}(\underline{r})=0$ für alle $\underline{r}$ im Gebiet der





Ladungsverteilung $\rho(\underline{r})$

($\underline{r}=0$ und Umgebung)

$$\Longleftrightarrow \sum_k \frac{\partial E_k^{ext}}{\partial x_k}\Big|_{\underline{r}=0} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\sum_{kl}\frac{\partial E_k^{ext}}{\partial x_l}\Big|_{\underline{r}=0}\,\delta_{kl}}_{} = 0$$

Ein solcher Term kann also in die Taylorentwicklung von $\phi^{ext}$ (**) einfach dazu addiert werden!

aus (**) ergibt sich also:

$$\phi^{ext}(\underline{r}) = \phi^{ext}(0) - \underline{r}\cdot\underline{E}^{ext}(0) - \frac{1}{6}\sum_{kl}\left(3x_k x_l - r^2\delta_{kl}\right)\frac{\partial E_k^{ext}}{\partial x_l}\Big|_{\underline{r}=0} + \ldots\ldots$$

Einsetzen in die Wechselwirkungsenergie

$$W^{ext} = \int d\underline{r}\, \rho(\underline{r})\, \phi^{ext}(\underline{r})$$

$$= \int d\underline{r}\, \rho(\underline{r}) \Big[ \underbrace{\phi^{ext}(0)}_{\text{Const}} - \underline{r} \cdot \underbrace{\underline{E}^{ext}(0)}_{\text{Konstanter Vektor}} + \ldots \Big]$$

benutze Definition der Multipole für die Verteilung $\rho(\underline{r})$

$$\Rightarrow W^{ext} = Q_0\, \phi^{ext}(0) - \underline{p} \cdot \underline{E}^{ext}(0) - \frac{1}{6} \sum_{kl} Q_{kl} \frac{\partial E_k^{ext}}{\partial x_l}\Big|_{\underline{r}=0} + \ldots$$

man sieht

- Gesamtladung der Verteilung $\rho(\underline{r})$ wechselwirkt mit dem $\underbrace{\text{Potential}}_{\text{externen}}$
- Dipolmoment wechselwirkt mit dem externen Feld
- Quadrupolmoment " " der Ableitung des Feldes

# Wichtiger Spezialfall

$\Rightarrow$ Wechselwirkung zweier Dipolmomente

(Annahme: Die Ladungsverteilung $\rho$, $\rho^{ext}$ haben jeweils nur ein Dipolmoment, so dass andere Beiträge vernachlässigt werden können)

$$\Rightarrow W^{ext} = W^{\text{Dipol-Dipol}}$$

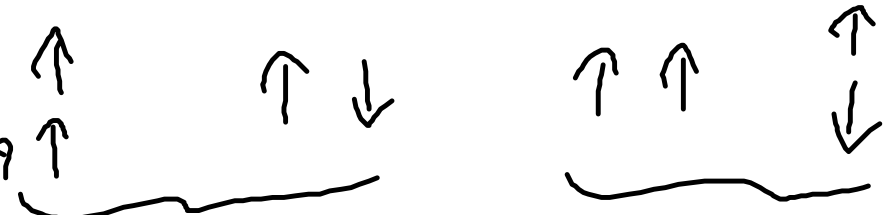
$$= -\underline{p} \cdot \underline{E}^{ext}(0)$$

Feld des ~~ein~~ zweiten (externen) Dipols $\underline{p}_2$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\underline{p}\cdot\underline{p}_2}{r^3} - 3\frac{(\underline{p}\cdot\underline{r})(\underline{p}_2\cdot\underline{r})}{r^5}\right)$$

Wechselwirkung zweier elektrischer Dipole

- Abstandsabhängigkeit $\sim \frac{1}{r^3}$
- Richtungsabhängigkeit!



attraktiv $W < 0$ — repulsiv $W > 0$

energetisch am günstigsten!

Wir beenden an dieser Stelle die Elektrostatik
(Phänomene in "Materie" kommen später!)

## III. Magnetostatik

→ Phänomene, die stationäre elektrische Ströme (und zeitlich konstante Magnetfelder) involvieren!

(analog zur Elektrostatik, in der es um ruhende Ladungsverteilungen geht)

# III.1. Elektrischer Strom

Betrachte als Beispiel metallische Draht

Frage: Wie kann es überhaupt zu einem Strom kommen?

## Erinnerung an die Elektrostatik.

Im statischen, äußeren elektrischen Feld verschieben sich die Ladungen im Innern des Drahts so lange, bis das totale Feld innen verschwindet!

($\underline{E} = 0$ im Leiter)

$\longrightarrow$ so kann kein Strom fließen

(denn: Strom $\hat{=}$ bewegten Ladungen

$\Leftrightarrow$ es müssen Kräfte $\underline{F}_i = q_i \underline{E}$ innen wirken!)

aber:

Durch Anbringen einer äußeren Spannungsquelle kann man ein dauerhaftes Feld ($\underline{E} \neq 0$) im Draht erzeugen

$\Rightarrow$ dauerhafte Kraft auf die Ladungsträger

$\Rightarrow$ Geschwindigkeitsfeld der Ladungen $\Rightarrow$ Strom!

## Definition der Stromdichte

$$\underline{j}(\underline{r},t) = \underbrace{\rho(\underline{r},t)}_{\text{Ladungsdichte}} \, \underbrace{\underline{v}(\underline{r},t)}_{\text{Geschwindigkeitsfeld}}$$

Dimensionen:

$\rho(\underline{r},t) \sim$ Ladung pro Volumeneinheit

$\underline{v}(\underline{r},t) \sim$ zurückgelegter Weg (in Stromrichtung) pro Zeiteinheit

$\Rightarrow$ Betrag $|\vec{j}(\underline{r},t)|$ : Ladung, die pro Zeiteinheit durch ein Flächenelement senkrecht zur Stromrichtung transportiert wird

$\left( \text{z.B. Strom in z-Richtung} \quad \rho = \frac{q}{\Delta x \Delta y \Delta z}, \; v = \frac{\Delta z}{t} \Rightarrow j = \rho \cdot v = \frac{q}{\Delta x \Delta y t} \right)$

Stromstärke:

$$I(t) = \int d\underline{F} \cdot \vec{j}(\underline{r},t)$$

Integral über vorgegebene Fläche

Dimension

$\Rightarrow$ Strom $\hat{=} \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}}$, $1\,A = \frac{C}{s}$ ← Coulomb, ← Sekunde

## III.2. Kontinuitätsgleichung

Experimentelle Erfahrung: Die Ladung ist eine Erhaltungsgröße!

d.h. Die zeitliche Änderung der totalen elektrischen Ladung in einem Volumen $V$ entspricht einem Stromfluß durch die Oberfläche dieses Volumens $(F_V)$

sei $Q(t) = \int_V d\underline{r}\, \rho(\underline{r},t)$ totale Ladung in $V$

dann gilt:

$$\boxed{\frac{d}{dt} Q(t) + \oint_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{j}(\underline{r},t) = 0}$$

Erhaltungssatz

<u>Umschreiben</u>:

$$\frac{d}{dt} \int_V d\underline{r}\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{j}(\underline{r},t)$$

$$= -\int_V d\underline{r}\, \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r},t)$$

Gauss'scher Integralsatz

$$\Rightarrow \int_V d\underline{r} \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho(\underline{r},t) + \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r},t) \right) = 0$$

muß für jedes Volumen gelten!

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\underline{r},t) + \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r},t) = 0}$$

Kontinuitätsgleichung!