Wh.:

Frage: Potential / Feld weit weg von der Ladungsverteilung?

Strategie: $$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}'\,\frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

entwickle $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ in Potenzen von $\frac{r'}{r} \ll 1$

Resultat:
$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty} Q_l\, r^{-l-1}$$

Entwicklung in Potenzen von $1/r$! mit $\underbrace{Q_l}_{\text{Multipole}} = \int d\underline{r}'\, r'^l\,\rho(\underline{r}')\,\underbrace{P_l(\cos\theta)}_{\text{Legendre-Pol.}}$

$l=0$ Monopol

$$\underbrace{Q_0 = \int d\underline{r}'\,\rho(\underline{r}')}_{\text{Gesamtladung}}, \quad \Phi^{(l=0)}(\underline{r}) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$\underline{l=1}$: $Q_1 = \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r}$

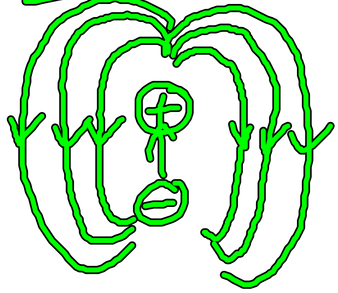
$\underline{p} = \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}')\, \underline{r}'$

elektrisches Dipolmoment (Vektor!)

$$\Phi^{(l=1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3}$$

$$\underline{E}^{(l=1)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^5} \left(3(\underline{p}\cdot\underline{r})\underline{r} - r^2\underline{p} \right)$$

Winkelabhängig!



Höhere Beiträge in der Multipolentwicklung:

$\underline{l=2}$: $Q_2 = \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}')\, r'^2 P_2(\cos\vartheta)$

$$= \ldots = \frac{1}{2r^2} \sum_{kl} Q_{kl}\, x_k x_l$$

$k, l = 1,2,3$

x_k, x_l: Komponenten von $\underline{r}$

mit $Q_{kl} = \int d\underline{r}'\, \rho(\underline{r}') \left(3 x_k' x_l' - r'^2 \delta_{kl}\right)$

„Quadrupoltensor"

Eigenschaften: ($\rightarrow$ Übung!)

- spurlos, d.h. $Q_{11} + Q_{22} + Q_{33} = 0$
- symmetrisch, d.h. $Q_{kl} = Q_{lk}$

Der Tensor Q_{kl} hat (nur) fünf unabhängige Komponenten!

Potential:

$$\phi^{(l=2)}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}Q_2$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2r^5}\sum_{kl} Q_{kl}\, x_k x_l$$

$$\sim \frac{1}{r^3} \text{ für große Abstände}$$

Zusammenfassung:

Potential weit weg von der Ladungsverteilung

$$\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_0}{r} + \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5}\sum_{kl} Q_{kl}\, x_k x_l + \dots\right)$$

II.6. Wechselwirkung einer Ladungsverteilung mit einem äußeren Feld

Wir hatten in Kap. II.4

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}\int d\underline{r}'\,\frac{\rho(\underline{r})\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{2}\int d\underline{r}\,\rho(\underline{r})\,\phi(\underline{r})$$

Energie einer Ladungsverteilung in dem durch diese Ladungsverteilung erzeugten Potential

Frage nun: Was ist die Energie einer Verteilung $\rho(\underline{r})$ in einem äußeren (externen) Potential $\phi^{ext}(\underline{r})$, das durch eine entsprechende externe Ladungsverteilung erzeugt wurde?

Definition:

$$W_{ext} = \int d\underline{r}\,\rho(\underline{r})\,\phi^{ext}(\underline{r})$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}\int d\underline{r}'\,\frac{\rho(\underline{r})\rho^{ext}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

<u>Idee</u>:

- $\rho(\underline{r})$ lokalisiert um den Ursprung ($\underline{r}=0$)
- In dem Gebiet, in welchem $\rho(\underline{r}) \neq 0$ ist, variiert das durch ρ^{ext} erzeugte Potential <u>nur langsam</u> mit $\underline{r}$.

(Idee dahinter: ρ^{ext} ist sehr weit weg von ρ $\Longrightarrow$ Φ^{ext} ändert sich in der Nähe des Ursprungs nur langsam)

Taylorentwicklung von $\Phi^{ext}(\underline{r})$ um $\underline{r}=0$ machen!

$$\Phi^{ext}(\underline{r}) = \underbrace{\Phi^{ext}(\underline{r}=0)}_{\text{const}} + \underline{r}\cdot\left(\nabla\Phi^{ext}(\underline{r})\right)\Big|_{\underline{r}=0} + \frac{1}{2}\left(\underline{r}\cdot\nabla\right)^2\Phi^{ext}(\underline{r})\Big|_{\underline{r}=0} + \dots \qquad (**)$$

2. Term in (**)

$$\underline{r}\cdot\left(\nabla\Phi^{ext}\right)\Big|_{\underline{r}=0} = -\underline{r}\cdot\underline{E}^{ext}(\underline{r}=0)$$

3. Term:

$$\frac{1}{2}(\underline{r}\cdot\nabla)^2\,\Phi^{ext}(\underline{r})\Big|_{\underline{r}=0} = \frac{1}{2}\sum_k\sum_l x_k x_l \underbrace{\frac{\partial^2 \Phi^{ext}(\underline{r})}{\partial x_k \partial x_l}\Big|_{\underline{r}=0}}_{-\frac{\partial E_k^{ext}}{\partial x_l}\big|_{\underline{r}=0}}$$

benutze nun noch, dass

$$\nabla\cdot\underline{E}^{ext}(\underline{r}) = 0$$ für alle $\underline{r}$ im Gebiet der Ladungsverteilung $\rho(\underline{r})$ ($\underline{r}=0$ und Umgebung)

$$\Longleftrightarrow \sum_k \frac{\partial E_k^{ext}}{\partial x_k}\Big|_{\underline{r}=0} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\sum_{kl}\frac{\partial E_k^{ext}}{\partial x_l}\Big|_{\underline{r}=0}\delta_{kl}}_{} = 0$$

Ein solcher Term kann also in der Taylorentwicklung von ϕ^{ext} (**) einfach dazu addiert werden!

aus (**) ergibt sich also:

$$\Phi^{ext}(\underline{r}) = \Phi^{ext}(0) - \underline{r}\cdot\underline{E}^{ext}(0) - \frac{1}{6}\sum_{kl}\left(3x_k x_l - r^2\delta_{kl}\right)\frac{\partial E_k^{ext}}{\partial x_l}\Big|_{\underline{r}=0} + \ldots\ldots$$

Einsetzen in die Wechselwirkungsenergie

$$W^{ext} = \int d\underline{r}\; \rho(\underline{r})\, \phi^{ext}(\underline{r})$$

$$= \int d\underline{r}\; \rho(\underline{r}) \Big[\underbrace{\phi^{ext}(0)}_{\text{const}} - \underline{r} \cdot \underbrace{\underline{E}^{ext}(0)}_{\text{konstanter Vektor}} + \dots \Big]$$

benutze Definition der Multipole für die Verteilung $\rho(\underline{r})$

$$\Rightarrow W^{ext} = Q_0\, \phi^{ext}(0) - \underline{p} \cdot \underline{E}^{ext}(0) - \frac{1}{6} \sum_{kl} Q_{kl} \frac{\partial E_k^{ext}}{\partial x_l}\bigg|_{\underline{r}=0} + \dots$$

man sieht

- Gesamtladung der Verteilung $\rho(\underline{r})$ wechselwirkt mit dem $\underset{\text{externen}}{\text{Potential}}$
- Dipolmoment wechselwirkt mit dem externen Feld
- Quadrupolmoment " " der Ableitung des Feldes

Wichtiger Spezialfall

$\Rightarrow$ Wechselwirkung zweier Dipolmomente

(Annahme: Die Ladungsverteilung ρ, ρ^{ext} haben jeweils nur ein Dipolmoment, so daß andere Beiträge vernachlässigt werden können)

$$\Rightarrow W^{ext} = W^{\text{Dipol-Dipol}}$$

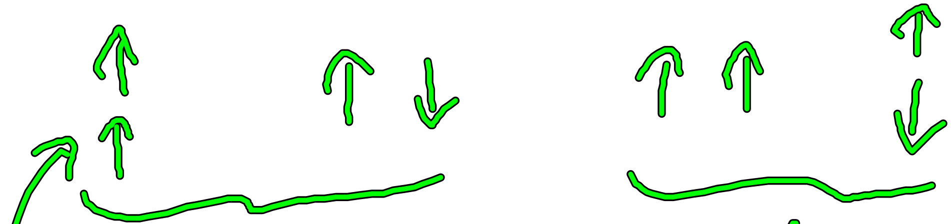
$$= -\underline{p} \cdot \underline{E}^{ext}(0)$$

Feld des ~~ein~~ zweiten (externen) Dipols $\underline{p}_2$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\underline{p}\cdot\underline{p}_2}{r^3} - 3\frac{(\underline{p}\cdot\underline{r})(\underline{p}_2\cdot\underline{r})}{r^5}\right)$$

Wechselwirkung zweier elektrischer Dipole

- Abstandsabhängigkeit $\sim \frac{1}{r^3}$
- Richtungsabhängigkeit!



attraktiv $W < 0$ repulsiv $W > 0$

energetisch am günstigsten!

Wir beenden an dieser Stelle die Elektrostatik
(Phänomene in "Materie" kommen später!)

III. Magnetostatik

→ Phänomene, die stationäre elektrische Ströme (und zeitlich konstante Magnetfelder) involvieren!

(analog zur Elektrostatik, in der es um ruhende Ladungsverteilungen geht)

III.1. Elektrischer Strom

Betrachte als Beispiel metallische Draht

Frage: Wie kann es überhaupt zu einem Strom kommen?

Erinnerung an die Elektrostatik.

Im statischen, äußeren elektrischen Feld verschieben sich die Ladungen im Innern des Drahts so lange, bis das totale Feld innen verschwindet!

($\underline{E} = 0$ im Leiter)

$\longrightarrow$ so kann kein Strom fließen

(denn: Strom $\hat{=}$ bewegten Ladungen
$\Leftrightarrow$ es müssen Kräfte
$\underline{F}_i = q_i \underline{E}$ innen
wirken!)

aber:

Durch Anbringen einer äußeren Spannungsquelle kann man ein dauerhaftes Feld ($\underline{E} \neq 0$) im Draht erzeugen

$\Rightarrow$ dauerhafte Kraft auf die Ladungsträger

$\Rightarrow$ Geschwindigkeitsfeld der Ladungen $\Rightarrow$ Strom!

Definition der Stromdichte

$$\underline{j}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t)\,\underline{v}(\underline{r},t)$$

Ladungsdichte Geschwindigkeitsfeld

Dimensionen:

$\rho(\underline{r},t) \sim$ Ladung pro Volumeneinheit

$\underline{v}(\underline{r},t) \sim$ zurückgelegter Weg (in Stromrichtung) pro Zeiteinheit

$\Rightarrow$ Betrag $|\vec{j}(\underline{r},t)|$: Ladung, die pro Zeiteinheit durch ein Flächenelement senkrecht zur Stromrichtung transportiert wird

$\left(\text{z.B. Strom in z-Richtung} \quad \rho = \frac{q}{\Delta x \Delta y \Delta z}, \; v = \frac{\Delta z}{t} \Rightarrow j = \rho \cdot v = \frac{q}{\Delta x \Delta y \, t} \right)$

Stromstärke:

$$I(t) = \int d\underline{F} \cdot \underline{j}(\underline{r},t)$$

Integral über vorgegebene Fläche

Dimension
$\Rightarrow$ Strom $\hat{=} \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}}$, $1\,A = \frac{C}{s}$

C ← Coulomb

s ← Sekunde

III.2. Kontinuitätsgleichung

Experimentelle Erfahrung: Die Ladung ist eine Erhaltungsgröße!

d.h. Die zeitliche Änderung der totalen elektrischen Ladung in einem Volumen V entspricht einem Stromfluss durch die Oberfläche dieses Volumens (F_V)

Sei $Q(t) = \int_V d\underline{r}\, \rho(\underline{r},t)$ totale Ladung in V

dann gilt:

$$\boxed{\frac{d}{dt} Q(t) + \oint_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{j}(\underline{r},t) = 0}$$

Erhaltungssatz

<u>Umschreiben</u>:

$$\frac{d}{dt} \int_V d\underline{r}\, \rho(\underline{r},t) = -\oint_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{j}(\underline{r},t)$$

$$= -\int_V d\underline{r}\, \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r},t)$$

Gauss'scher Integralsatz

$$\Leftrightarrow \int_V d\mathbf{r} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r},t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r},t) \right) = 0$$

muß für jedes Volumen gelten!

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r},t) + \nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r},t) = 0}$$

Kontinuitätsgleichung!