Magnetostatik

Letzte Vl: Kontinuitätsgl.

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \operatorname{div} \underline{j}(\underline{r},t) = 0 \right\|$$

$$\frac{\partial \rho(\underline{r},t)}{\partial t} = 0 \quad \text{(Ladungsverteilung stationär)}$$

$$\Longrightarrow \quad \left\| \operatorname{div} \underline{j}(\underline{r},t) = 0 \right\| \quad \text{und} \quad \underline{j}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r})$$

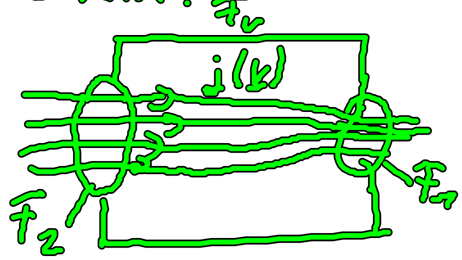
stationärer Strom

Was aber nicht heißt, daß $\underline{j}(\underline{r}) = 0$!!

Folgerung

Im stationären Fall fließt durch jeden Querschnitt eines Leiters derselbe Strom.

Beweis



Betrachte Volumen V

$$\operatorname{div} \underline{j} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \int_V d^3r \, \operatorname{div} \underline{j} = 0 \underset{\text{Gauß}}{\Longleftrightarrow} \oint_{F_V} dF \, \underline{n} \cdot \underline{j} = 0 = 0 = \int_{F_1} dF \, \underline{n}_1 \cdot \underline{j} + \int_{F_2} dF \, \underline{n}_2 \cdot \underline{j}$$

$\Rightarrow \quad I_1 = I_2$ qed $\qquad = I_1 - I_2$

III.3. Magnetische Induktion, Kraft

Stromdichte (bewegte Ladung) erzeugen Felder!

Definition

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \; \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}}$$

Biot-Savart'sches Gesetz

Feld, daß die Stromdichte $\underline{j}$ beim Ort $\underline{r}$ erzeugt

Analogie Elektrostatik

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \; \rho(\underline{r}) \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \qquad \left(1V = 1 \frac{Nm}{As} = 1 \frac{kg\,m^2}{As^3}\right) \leftarrow ?$$

beachte: Vergleiche ε_0 und μ_0

$$\boxed{\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1}$$ mit c Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Man sieht: Die Konstanten ε_0 und μ_0 sind nicht unabhängig.

Hintergrund; Unterschied zw ruhenden und bewegten Ladungen ist Frage des Bezugssystems
$\Rightarrow$ spezielle Relativitätstheorie

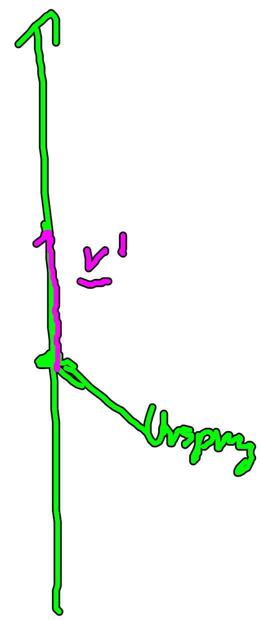
Einheit des Feldes (SI)

$$[B] = 1\,T = 1\,\text{Tesla} = 1\,\frac{Vs}{Cm} = 1\,\frac{kg\,\cancel{m}\,\cancel{s}}{s^2\,A\cancel{s}\,\cancel{m}}$$
$$= 1\,\frac{kg}{As^2} = 1\,V\frac{s}{m^2}$$

Spezialfälle für $\underline{B}$

betrachte dünnen geraden "Leiter-Faden" mit homogener Stromdichte I

$$j(\underline{r}')\,d^3r' = \rho\,\underline{v}'\,d^3r' = \rho\,\frac{dr}{dt}\,d^3r'$$
$$= \underbrace{\rho\,\frac{d^3r'}{dt}}_{I}\,d\vec{r}\,' = I\,d\vec{r}\,'$$



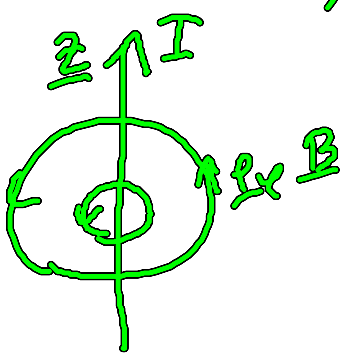
$$\to \underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\,I\int_{Weg} d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

Auswertung in Zylinder-Koordinaten

NR: $\underline{r}' = z'\,\underline{e}_z \to d\underline{r}' = dz'\,\underline{e}_z$

$$(\underline{r}-\underline{r}') = \rho\,\underline{e}_\rho + (z-z')\,\underline{e}_z$$
$$\Rightarrow d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}') = dz'\rho\,(\underline{e}_\rho \times \underline{e}_z) = dz'\rho\,\underline{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \frac{I}{2\pi\rho} \underline{e}_\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2+y^2}$$



- B Linien geschlossen
- B-Linien sind konzentrische Kreise
- Rechtsschraube "Rechte-Hand Regel"

merke: In diesem Fall gilt

$|\underline{B}| \propto I$ Stromstärke

$|\underline{B}| \propto \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\text{Abstand} \perp \text{zum Leiter}}$

Kraft zwischen zwei Stromdichten

$$\underline{F} = \int d^3r \; \underline{j}(\underline{r}) \times \underline{B}(\underline{r}) \quad \text{("Ampère'sches Gesetz")}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r \int d^3r' \; \underline{j}(\underline{r}) \times \left(\underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \right)$$

Analogon zu Coulomb-Kraft in Elektrostatik

$$\left[\underline{F}_C = \int d^3r \, \rho(\underline{r}) \, \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \rho(\underline{r}) \rho(\underline{r}') \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \right)$$

Spezialfälle

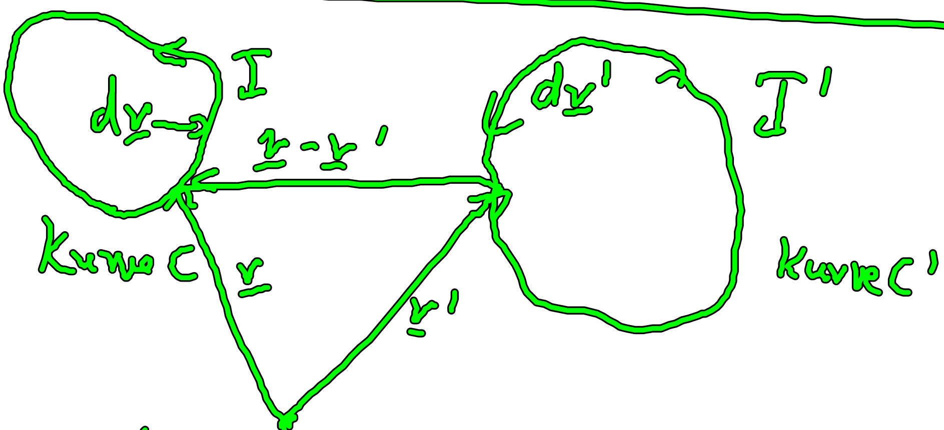
a) Stromdichte $\underline{j}(\underline{r})$ das beschreibt Bewegung einer Punktladung bei $\underline{r} = \underline{r}_0$

$$\underline{j}(\underline{r}) = \rho(\underline{r}) \underline{v} = q \, \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) \underline{v}$$

$$\rightarrow \underline{F} = \int d^3r\, \underline{j}(\underline{r}) \times \underline{B}(\underline{r}) = q\,\underline{v}\,(\underline{v}_0 \times \underline{B}(\underline{r}_0))$$

„Lorentz-Kraft"

b) Kraft zw. 2 stromdurchflossenen Leiterschleifen



$$\underline{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r \int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}) \times \left(\underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}\right)$$

hier: $\underline{j}(\underline{r}) = I\, d\underline{r}$

$\underline{j}(\underline{r}') = I'\, d\underline{r}'$

$$\rightarrow \underline{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I I' \oint_C \oint_{C'} \frac{d\underline{r} \times (d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}'))}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Diesen Ausdruck umschreiben (symmetrisieren)

$$d\underline{r} \times (d\underline{r} \times (\underline{r}-\underline{r}')) = d\underline{r}'\,(d\underline{r}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')) - (\underline{r}-\underline{r}')(d\underline{r}\cdot d\underline{r}')$$

Zum 1. Term

$$\oint_{C'} d\underline{r}' \left(\oint_C d\underline{r} \cdot \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \right) =$$

$$\oint_{C'} d\underline{r}' \left(\oint_C d\underline{r} \cdot \nabla_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \right) (-1)$$

$$\underset{\text{Stokes}}{=} \oint_{C'} d\underline{r}' \left(\oint_{F_C} \text{rot grad} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \cdot d\underline{F} \right) = 0 \quad \text{da } \text{rot grad}\,\varphi = 0$$

$$\longrightarrow \underline{F} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I I' \oint_C \oint_{C'} d\underline{r} \cdot d\underline{r}' \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Folgerung

- Leiterstücke in denen der Strom parallel fließt, ziehen sich an! ($I\,d\underline{r} \cdot I' d\underline{r}' > 0$)
- Leiterstücke in denen der Strom antiparallel fließt, stoßen sich ab! ($I\,d\underline{r} \cdot I' d\underline{r}' < 0$)

III.4 Magnetostatik Grundgleichungen Vektorpotential

Zunächst Biot-Savart'sches Gesetz

$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

betrachte

$$\nabla \times \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \text{rot}_{\underline{r}} \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underbrace{\nabla_{\underline{r}} \times \underline{j}(\underline{r}')}_{0} - \underline{j}(\underline{r}') \times \nabla_{\underline{r}} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$= \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$

$$\underline{B}(\underline{r}) = \nabla_{\underline{r}} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\underline{r}' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} =: \nabla_{\underline{r}} \times \underline{A}(\underline{r})$$

vgl. $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla_{\underline{r}}\,\phi(\underline{r})$ i.d. Elektrostatik

mit $$A(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\underline{r}' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

beachte $\underline{A}$ ist nicht eindeutig durch $\underline{B}$ bestimmt

D.h. Eine "Eichtransformation"

$$\underline{A} \to \underline{A}' = A + \operatorname{grad} \varphi(\underline{r})$$ läßt $\underline{B}(\underline{r})$ invariant

↑ skalares Feld Potential

Wir haben also gesehen, dass $\underline{B}$ als Rotation eines Vektorpotentials darstellen läßt

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \nabla\times \underline{A}(\underline{r}) = \operatorname{rot} \underline{A}(\underline{r})}$$

Folgerung

a) $\boxed{\operatorname{div} \underline{B}(\underline{r}) = 0}$!! (*)

vgl $\operatorname{div} \underline{E}(\underline{r}) = \frac{\varrho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$ Elektrostatik

Bedeutung: Es gibt keine Quellen der magnetischen Induktion

$\iff$ Es gibt keine magnetische Ladungen! (Monopole)

mit Gauß

$$\boxed{\int_{F_V} \underline{B}(\underline{r})\, d\underline{F} = 0}$$ (**)

Fluß der magnetischen Induktion durch beliebiges Volumen V ist Null

b) Ein weiterer Zusammenhang zw. $\underline{B}$ und $\underline{j}$

$$\underline{B}(\underline{r}) = \mathrm{rot}\, \underline{A}(\underline{r}) \qquad A(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}\,\underline{B}(\underline{r}) = \nabla \times (\nabla \times A)$$

$$= \nabla(\underbrace{\nabla\cdot\underline{A}}_{\mathrm{div}}) - \Delta A(\underline{r})$$

Betrachtung der Terme

$$\nabla_{\underline{r}}(\nabla_{\underline{r}}\cdot\underline{A}(\underline{r})) = \nabla_{\underline{r}}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \,\nabla_{\underline{r}}\cdot\left(\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)\right)$$

$$= \nabla_{\underline{r}}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, j(\underline{r}')\, \underbrace{\nabla_{\underline{r}}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-\nabla_{\underline{r}'}\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}\right)$$

$$= \nabla_{\underline{r}}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\left[-\nabla_{\underline{r}'}\cdot\frac{j(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\underbrace{\nabla_{\underline{r}'}\cdot\underline{j}(\underline{r}')}_{=0}\right]\right)$$

$$= -\nabla_{\underline{r}}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \nabla_{\underline{r}'}\cdot\frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right)$$

$$= -\nabla_{\underline{r}}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\underbrace{\int_{F_V} dE\, \frac{\underline{j}(\underline{r})}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\text{verschwindet für hinreichend abklingende Stromverteilung.}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{rot}\,\underline{B}(\underline{r}) = -\Delta_{\underline{r}} A(\underline{r})$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \underline{j}(\underline{r}')\, \underbrace{\Delta_r \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{-4\pi\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')} \leftarrow \text{s. ES}$$

$$= \mu_0\, \underline{j}(\underline{r})$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0\, \underline{j}(\underline{r})} \quad (\mathrm{X})$$

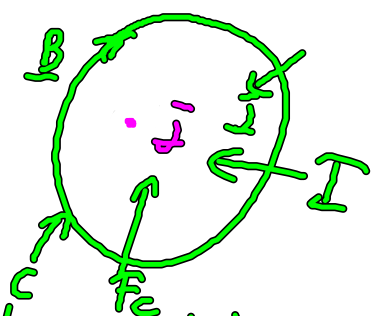
Bedeutung: "stationäre Ströme erzeugen magnetostatische Felder. Deren Feldlinien sind geschlossen!"

äquivalent (mit Stokes'schem Satz)

$$\left[\oint_F d\underline{F}\,\operatorname{rot}\underline{B} = \oint_{\partial F} d\underline{r}\,\underline{B}(\underline{r})\right]$$

$$\oint_C \underline{B}(\underline{r})\, d\underline{r} = \mu_0 \oint_{F_C} d\underline{F}\, \underline{j}(\underline{r})$$

$$= \mu_0 I \quad (\mathrm{XX})$$



"Ampère'sches Durchflutungsgesetz"

Nachbemerkungen zum Vektorpotential

Wir hatten

$$\underline{B}(\underline{r}) = \nabla\times \underline{A}(\underline{r}) \quad \text{mit} \quad \left|\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\right| \quad (\mathrm{X})$$

Eichtrafo

$$\underline{A}(\underline{r}) \to \underline{A}'(\underline{r}) = \underline{A}(\underline{r}) + \operatorname{grad}\varphi(\underline{r})$$

$$\underline{B}'(\underline{r}) = \mathrm{rot}\,\underline{A}'(\underline{r})$$

$$= \mathrm{rot}\,\underline{A}(\underline{r})$$

da ~~rot~~ $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi(\underline{r}) = 0$

Eine spezielle Eichung ist die sog. "Coulombeichung"

$$\mathrm{div}\,\underline{A}(\underline{r}) = 0$$

Das gilt auch f. Ausdruck (*)!

(hatten wir benutzt, um $\mathrm{rot}\,\underline{B}(\underline{r}) = \nabla_{\underline{r}}\,\mathrm{div}\,A(\underline{r}) - \Delta A(\underline{r}) = \mu_0 \underline{j}(\underline{r})$ herzuleiten!)

Folgerung für Coulombeichung

$$\Delta_{\underline{r}}\,\underline{A}(\underline{r}) = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r})$$

$\longrightarrow$ jede Komponente von $\underline{A}$ erfüllt Poisson-Gl.!

(vgl. Elektrostatik: $\Delta_{\underline{r}}\,\phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$)