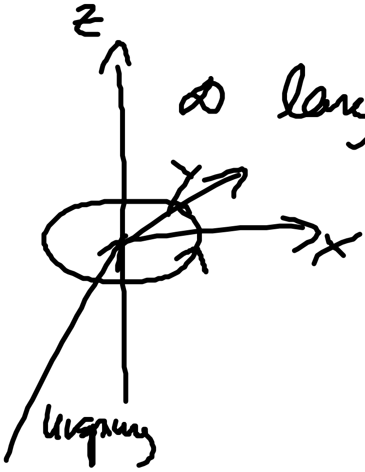
Wh.: Biot - Savart

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\underline{r}' \, j(\underline{r}') \times \frac{(\underline{r}-\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}$$



∞ langer Draht

$$j(\underline{r}')\,d\underline{r}' = I\, dz' \,\hat{\underline{e}}_z$$

$$(\underline{r}-\underline{r}') = \rho\, \hat{\underline{e}}_\rho + (z-z')\,\hat{\underline{e}}_z$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}') = dz' \rho\, \hat{\underline{e}}_\varphi$$

$$\Rightarrow B(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \rho \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}^3} \;\hat{\underline{e}}_\varphi$$

setze O.B.d.A. $z=0$

$$\Rightarrow \underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \rho\, \hat{\underline{e}}_\varphi \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z'^2}^3}$$

Substitution: $z' = \rho \sinh u$

$$dz' = \rho \cosh u \, du$$

$$\rho^2 + z'^2 = \rho^2 \underbrace{(1+\sinh^2 u)}_{\cosh^2 u}$$

$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \rho \, \hat{\underline{e}}_\varphi \frac{1}{\rho^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} du \, \frac{1}{\cosh^2 u}}_{[\tanh u]_{-\infty}^{\infty} = 2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1}{\rho} I \, \hat{\underline{e}}_\varphi$$

Weitere wichtige Zusammenhänge:

$$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}(\underline{r})$$

$\underline{B}$ bleibt unverändert, wenn man zu $\underline{A}$ einen Term der Form $\nabla\varphi$ addiert! — Eichinvarianz

$$\text{mit } \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\underline{r}' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

Es gibt also keine Quellen (Monopole) in der Magnetostatik!

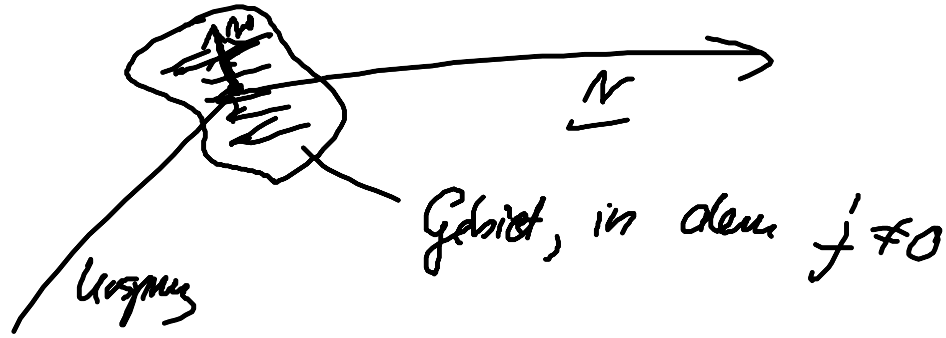
$$\nabla \times \underline{B}(\underline{r}) = \mu_0 \underline{j}(\underline{r})$$

Coulombeichung $\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}) = 0$

$$\Longrightarrow \Delta_{\underline{r}} \underline{A}(\underline{r}) = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r})$$

III.5. Magnetische Multipole

betrachte räumlich begrenzte Stromverteilung $\underline{j}(\underline{r}')$



Frage:
Vektorpotential und Feld weit weg von der Stromverteilung!

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\underline{r}' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Vorgehensweise ist wie in der Elektrostatik

$\Rightarrow$ Taylorentwicklung der Funktion $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$ in Potenzen von $\frac{r'}{r} \ll 1$

Betrachte nur die ersten beiden Terme

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r}\left(1 + \cos\vartheta\left(\frac{r'}{r}\right) + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r^3} + \dots$$

$$\underline{r}\cdot\underline{r}' = r\, r' \cos\vartheta$$

<u>Einsetzen in das Vektorpotential</u>

$$\underline{A}(\underline{r}) = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d\underline{r}'\, \underline{j}(\underline{r}')}_{\underline{A}^{(0)}(\underline{r})} + \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^3}\int d\underline{r}'\,(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}')}_{\underline{A}^{(1)}(\underline{r})} + \dots$$

Zum „Monopol-Beitrag" ($\underline{A}^{(0)}(\underline{r})$)

$$\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(x_k' \,\mathbf{j}(\mathbf{r}') \right) = x_k' \,\cancel{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}')} + \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \underbrace{\nabla_{\mathbf{r}'} x_k'}_{\text{Einheitsvektor in } k\text{-Richtung}}$$

$(k = 1, 2, 3)$

$$= \mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \hat{\mathbf{e}}_k$$

$$= j_k(\mathbf{r}')$$

$$\boxed{\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}}$$

beachte: $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ wegen der Kontinuitätsgleichung $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \right)$

$\Rightarrow$ k-te Komponente von $\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{r})$:

$$A_k^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V d\mathbf{r}' \, j_k(\mathbf{r}')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V d\mathbf{r}' \, \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left(x_k' \,\mathbf{j}(\mathbf{r}') \right)$$

Gauss'schen Satz $\quad = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d\underline{F}' \; x_\mu' \, \underline{j}(\underline{r}') = 0$

Oberfläche des ganzen Raums

Annahme: Stromdichte ist Null auf dem Rand!

$\Rightarrow \underline{A}^{(0)}(\underline{r}) = 0$ Monopol-Beitrag zum Vektorpotential verschwindet!

$\hat{=}$ erneute Bestätigung der Tatsache, dass es keine "magnetischen Ladungen" gibt!

<u>Nächster Term</u>: (Dipolterm)

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \int d\underline{r}' (\underline{r} \cdot \underline{r}') \, \underline{j}(\underline{r}')$$

benutze zunächst:

$$(\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')) \times \underline{r} = (\underline{r} \cdot \underline{r}') \, \underline{j}(\underline{r}') - (\underline{r} \cdot \underline{j}(\underline{r}')) \, \underline{r}'$$

$$= 2 (\underline{r} \cdot \underline{r}') \, \underline{j}(\underline{r}') - \left[(\underline{r} \cdot \underline{r}') \, \underline{j}(\underline{r}') + (\underline{r} \cdot \underline{j}(\underline{r}')) \, \underline{r}' \right]$$

$$\Rightarrow \underline{A}^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} \int d\underline{r}' (\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')) \times \underline{r}$$

$$+\frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{r^3}\,\frac{1}{2}\int d\underline{r}'\left[(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}')+(\underline{r}\cdot\underline{j}(\underline{r}'))\,\underline{r}'\right]$$

betrachte Integranden des 2. Terms

es gilt:

$$\nabla_{\underline{r}'}\cdot\left(x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}')\right)$$

$$=\nabla_{\underline{r}'}\left(x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\right)\underline{j}(\underline{r}')+x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underbrace{\nabla_{\underline{r}'}\underline{j}(\underline{r}')}_{0\text{ wg. Kontinuitätsgl.}}$$

$$=(\nabla_{\underline{r}'}x_k')(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}')$$

$$+x_k'\,\nabla_{\underline{r}'}(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}')=(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,j_k(\underline{r}')+x_k'(\underline{r}\cdot\underline{j}(\underline{r}'))$$

benutze jetzt:

$$\underbrace{\int d\underline{r}'\,\nabla_{\underline{r}'}\cdot\left(x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}')\right)}_{\int d\underline{F}'\,[x_k'(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}]\,=\,0\,!}$$

$$=\int d\underline{r}'\left((\underline{r}\cdot\underline{r}')\,j_k(\underline{r}')+x_k'(\underline{r}\cdot\underline{j}(\underline{r}'))\right)$$

$$=0$$

Es bleibt also

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} \int d\underline{r}' \left(\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')\right) \times \underline{r}$$

definiere das magnetische Moment (oder magnetisches Dipolmoment)

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \int d\underline{r}' \left(\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}') \right)$$

$$\Rightarrow \underline{A}^{(1)}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\underline{m} \times \underline{r}}{r^3}$$

Erster nicht-verschwindender Beitrag zum Vektorpotential!

Bemerkungen

a) Vergleich mit der Elektrostatik

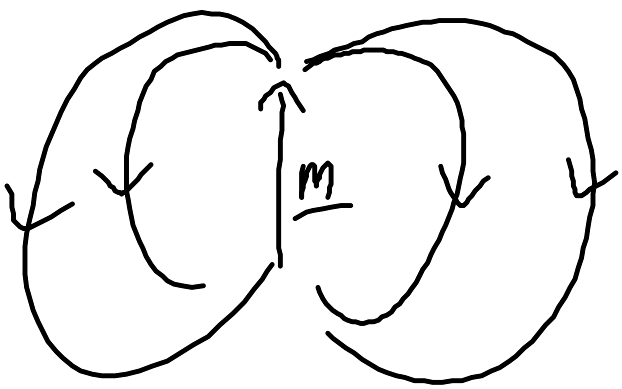
$$\underline{p} = \int d\underline{r}' \, \underline{r}' \, \rho(\underline{r}')$$

b) $\underline{B}^{(1)}(\underline{r}) = \underline{B}^{\text{Dipol}}(\underline{r}) = \nabla \times \underline{A}^{(1)}(\underline{r})$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\underline{r}\cdot\underline{m})\underline{r}}{r^5} - \frac{\underline{m}}{r^3}\right]$$

völlig analog zum Feld des elektrischen Dipols!

$\underline{m} \to \underline{p}$, $\frac{\mu_0}{4\pi} \to \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$



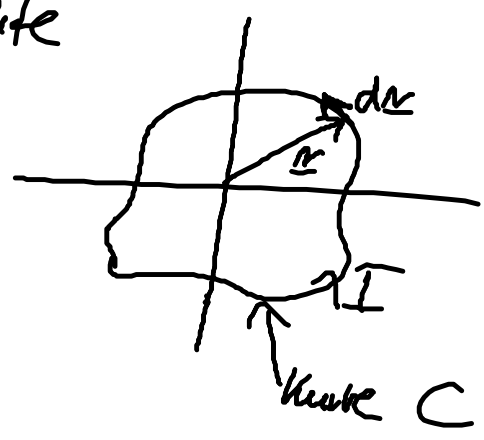
„Kompassnadel"

Beispiele für das magnetische Moment

a) Ebene Leiterschleife

$\underline{j}(\underline{r}')\overbrace{d\underline{r}'}^{\text{Volumenelement } dV'}$

$\longrightarrow I\,\underbrace{d\underline{r}'}_{\text{Wegelement}}$

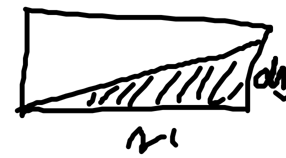


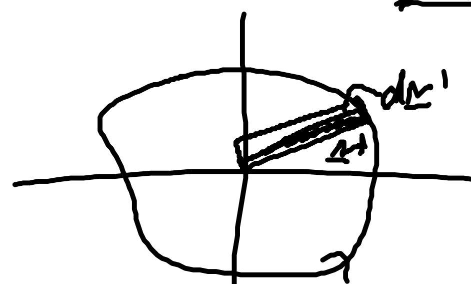
Ebene

$$\underline{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \left(\underline{r}' \times d\underline{r}' \right)$$

Wegelement

$$\frac{1}{2}\left(\underline{r}' \times d\underline{r}' \right) = d\underline{F}'$$





$$\underline{m} = I F_C \cdot \underline{n}$$

Normalenvektor auf der Fläche

Fläche, die von der Kurve C umschlossen wird

$\underline{m}$ steht also senkrecht auf der Leiterschleife

b) Bewegte Punktladungen (mit Ladungen q)

$$\underline{j}(\underline{r}') = q \sum_{i=1}^{N} \delta\left(\underline{r}' - \underline{r}_i(t)\right) \underline{v}_i$$

Geschwindigkeit

zeitabhängigen Position der Ladungen

$$\underline{m} = \frac{1}{2}\int d\underline{r}'\left(\underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}')\right)$$

$$= \frac{q}{2}\sum_{i=1}^{N}\underbrace{\left(\int d\underline{r}'\,\underline{r}'\,\delta(\underline{r}'-\underline{r}_i(t))\right)}_{\underline{r}_i(t)} \times \underline{v}_i$$

$$\underline{m} = \frac{q}{2}\sum_{i=1}^{N}\underline{r}_i(t) \times \underline{v}_i$$

$$= \frac{q}{2m}\sum_{i=1}^{N}\left(\underline{r}_i(t) \times m\underline{v}_i\right)$$

Masse der Teilchen

benutze: $\underline{r}_i \times \underbrace{m\underline{v}_i}_{\text{Impuls}} = \underline{l}_i$ Bahndrehimpuls des i-ten Teilchens

$$\underline{m} = \frac{q}{2m}\sum_{i=1}^{N}\underline{l}_i = \frac{q}{2m}\underline{L}$$

Gesamtdrehimpuls des Systems bewegter Punktladungen!

Mit bewegten Ladungen ist also ein Drehimpuls vorhanden, dieser wiederum führt zu einem magnetischen Moment!

$$\underline{m} = \frac{q}{2m}\underline{L}$$

Masse

Das Verhältnis $\frac{|\underline{m}|}{|\underline{L}|}$ bezeichnet man als

<u>gyromagnetisches Verhältnis</u> !

Klassisches Ergebnis aus der Magnetostatik:

$$\frac{|\underline{m}|}{|\underline{L}|} = \frac{q}{2m}$$

gilt auch für die Bahnbewegung der Elektronen!

anders beim Spin des Elektrons

magnet. Moment des Spins $\rightarrow$ $\dfrac{m_s}{s} \approx \dfrac{(-e)}{m}$ Unterschied um Faktor $\underline{2}$!

s: Spin-Drehimpuls

III. 6. Kraft auf einen magnetischen Dipol im äußeren Magnetfeld; Energie

aus Kap. III.3.
Kraft auf eine Stromverteilung:

$$\underline{F} = \int d\underline{r}' \left(\underline{j}(\underline{r}') \times \underline{B}^{ext}(\underline{r}') \right)$$

$\underline{B}^{ext}$: Feld, das von Strömen $\underline{j}^{ext}$ außerhalb der interessierenden Verteilung $\underline{j}$ erzeugt wird.

Annahme:

In der Umgebung der Stromdichte $\underline{j}(\underline{r}')$ ist $\underline{B}^{ext}$ nur schwach vom Ort abhängig.

$\longrightarrow$ Taylorentwicklung:

$$\underline{B}^{ext}(\underline{r}') = \underline{B}^{ext}(\underline{r}) + (\underline{r}' - \underline{r}) \cdot \nabla_{\underline{r}} \underline{B}^{ext}(\underline{r}) + \ldots\ldots$$

Idee: $\underline{j}(\underline{r}')$ sei lokalisiert bei einem Ort $\underline{r}$

Einsetzen:

$$\underline{F} = \int d\underline{r}' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{B}^{ext}(\underline{r}) + \int d\underline{r}' \, \underline{j}(\underline{r}') \times (\underline{r} - \underline{r}') \nabla_{\underline{r}} \underline{B}^{ext}(\underline{r}) + \ldots$$

Der erste Term verschwindet, da

$$\int d\underline{r}' \, \underline{j}(\underline{r}') \times \underline{B}^{ext}(\underline{r}) = \underbrace{\left(\int d\underline{r}' \, \underline{j}(\underline{r}') \right)}_{0\text{, da es keine magnetische Monopole gibt}} \times \underline{B}^{ext}(\underline{r})$$

da $\underline{r}$ nicht Integrationsvariable (siehe Argumentation bei $\underline{A}^{(0)}(\underline{r})$ Monopolbeitrag zum Vektorpotential)

$\Rightarrow$ 1. Term zu $\underline{F}$ verschwindet

2. Term:

$$\underline{F} = \nabla_{\underline{r}} \left(\left(\underline{m} \cdot \underline{B}^{ext}(\underline{r}) \right) \right)$$

$\rightarrow$ Ü !