Wh: $\underline{F} = \nabla_{\underline{r}} \left(\underline{m} \cdot \underline{B}^{ext}(\underline{r}) \right) \rightarrow$ ÜE

IV. Maxwellgleichungen der Elektrodynamik

$\hat{=}$ Verallgemeinerung der elektrostatischen und magnetostatischen Grundgleichungen auf zeitabhängige Phänomene!

IV.1. Zusammenfassung der statischen Gleichungen

Zunächst: Einführung neuer Feldgröße:

$\underline{D}(\underline{r})$ „dielektrische Verschiebung"

$$\underline{D}(\underline{r}) = \varepsilon_0 \underline{E}(\underline{r})$$

und:

$$\underline{H}(\underline{r}) = \frac{1}{\mu_0} \underline{B}(\underline{r})$$

Magnetfeld

Magnetische Induktion

Hier an dieser Stelle ist die Einführung der neuen Bezeichnungen ein formaler Punkt

→ wird später wichtig, wenn wir Elektrodynamik „in Materie" behandeln!

$$\boxed{\begin{array}{ll} \nabla \cdot \underline{D}(\underline{r}) = \rho(\underline{r}) & \nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}) = 0 \\ \nabla \times \underline{E}(\underline{r}) = 0 & \nabla \times \underline{H}(\underline{r}) = \underline{j}(\underline{r}) \end{array}}$$

- (diese Gleichungen sind, wie wir später sehen werden, auch in Materie gültig!)

- Bedeutung:
  - Elektrostatische Felder sind wirbelfrei und werden durch ruhende Ladungen erzeugt
  - Magnetostatische Felder sind quellfrei und werden durch stationäre Ströme erzeugt

- Mathematisch: lineare Diff.-Gleichungen 1. Ordnung für die Felder

  → reflektiert Superpositionsprinzip für die Felder!

- Im statischen Fall sind elektrische und magnetische Felder vollständig entkoppelt

$\Rightarrow$ getrennte Behandlung der Phänomene

- Die Gleichungen $\nabla \times \underline{E} = 0$ und $\nabla \cdot \underline{B} = 0$ zeigen, dass man Potentiale der folgenden Form einführen kann:

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla \Phi(\underline{r})$$

$$\underline{B}(\underline{r}) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r})$$

im stationären Fall! $\cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}}$

- Die Gleichung $\nabla \times \underline{H}(\underline{r}) = \underline{j}(\underline{r})$ enthält die Kontinuitätsgleichung, denn: $\nabla \cdot (\nabla \times \underline{H}) = 0 = \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r})$

<u>Ziel:</u> Beschreibung zeitabhängiger Phänomene

- <u>beachte:</u>

  Im statischen Fall sollten sich die neuen Gleichungen auf die bekannten Gleichungen reduzieren.

- <u>Experimentelle Erfahrungen:</u>

  Die Gleichungen $\nabla \cdot \underline{D} = \rho$ und $\nabla \cdot \underline{B} = 0$

sind auch für zeitabhängige Felder $\underline{D}(\underline{r},t)$, $\underline{B}(\underline{r},t)$ und zeitabhängige Ladungen $\rho(\underline{r},t)$ gültig!
– aber nicht die beiden anderen Gleichungen!

IV.2. Das Faraday'sche Induktionsgesetz

Faraday'sche Experimente (1831)

Frage: Können magnetische Felder Ströme erzeugen?

Ausgangssituation:

Sei F_C eine ortsfeste Fläche, C sei der Rand der Fläche. Sei $\underline{B}(\underline{r},t)$ orts- und zeitabhängiges Magnetfeld:

betrachte nun den Fluß

$$\Phi_B(t) = \int_{F_C} d\underline{F} \cdot \underline{B}(\underline{r},t)$$

Experimentelle Beobachtung:

Falls sich der magnetische Fluß Φ_B zeitlich ändert, dann wird in der

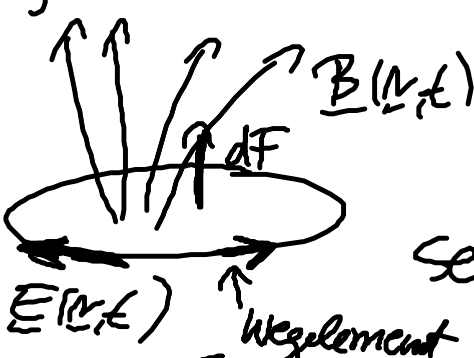
Randkurve C ein elektrisches Feld $\underline{E}(\underline{r},t)$ erzeugt. Dieses wiederum führt zu einem Strom!

$$\int_C d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r},t) = \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t}\Phi_B(t)}_{\text{zeitliche Änderung des Flusses}}$$

Linienintegral entlang der Kurve C

z.B. durch
- Bewegung eines Permanentmagneten relativ zu F_C
- Bewegung einer Leiterschleife relativ zu F_C

Es gilt dabei die "Lenz'sche Regel"



sei $\dot{\underline{B}}$ parallel zu $d\underline{F}$

$$\int d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int d\underline{F} \cdot \underline{B}(\underline{r},t)}_{\Phi}$$

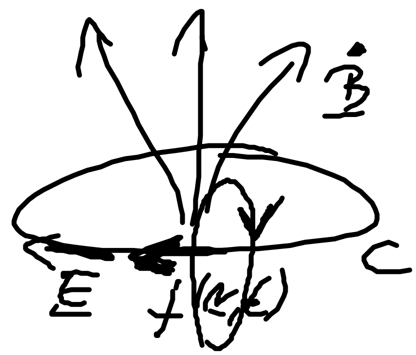
Wegen des Minuszeichens zeigt das erzeugte elektr. Feld antiparallel zum Wegelement

in der Kurve C

Annahme: Das erzeugte Feld erzeugt einen Strom gemäß der Gleichung

$$\underline{j}(\underline{r},t) = \sigma \; \underline{E}(\underline{r},t)$$

Leitfähigkeit



erzeugt wieder ein Magnetfeld

– tendiert dazu, das erzeugende Feld $\underline{B}$ zu schwächen!

Umformulierung des Faraday'schen Gesetzes:

$$\oint_C d\underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{F_C} d\underline{F} \cdot \underline{B}(\underline{r},t)$$

mit Stokes'schem Integralsatz (linke Seite)

$$\int_{F_C} d\underline{F} \left(\nabla \times \underline{E}(\underline{r},t) \right) = - \int_{F_C} d\underline{F} \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}(\underline{r},t)$$

(Annahme: Fläche F_C bewegt sich nicht!)

Soll gelten für beliebige Fläche F_C

$$\rightarrow \boxed{\nabla \times \underline{E}(\underline{r},t) = - \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}(\underline{r},t)}$$

neue Maxwell-Gleichung, die die Gleichung $\nabla \times \underline{E}(\underline{r}) = 0$ in der Elektrostatik ersetzt!

IV.3. Die Maxwell'sche Ergänzung

Unsere bisherigen verallgemeinerten Gleichungen lauten also:

① $\nabla \cdot \underline{D}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t)$

② $\nabla \cdot \underline{B}(\underline{r},t) = 0$

③ $\nabla \times \underline{E}(\underline{r},t) = - \frac{\partial}{\partial t} \underline{B}(\underline{r},t)$

④ $\nabla \times \underline{H}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r},t)$

Diese Gleichungen sind im zeitabhängigen Fall noch nicht konsistent!

Warum? Kontinuitätsgleichung

Fehler liegt in der vierten Gleichung!

Wende darauf die Divergenz an.

$$\nabla \cdot \left(\nabla \times \underline{H}(\underline{r},t) \right) = 0$$

Vektoranalysis

anderseits: $\nabla \cdot \underline{j}(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\underline{r},t)$

$\neq 0$ für zeitabhängige Ladungen!

Maxwell gelang es, diese Inkonsistenz zu beseitigen! (1865)

betrachte nochmal die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \cdot \underline{j}(\underline{r},t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\underline{r},t) = 0$$

benutze $\rho(\underline{r},t) = \nabla \cdot \underline{D}(\underline{r},t)$ (1)

$$\nabla \cdot \underline{j}(\underline{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \underline{D}(\underline{r},t)\right) = 0$$

vertausche räuml. und zeitliche Ableitung

$$\nabla \cdot \Big(\underline{j}(\underline{r},t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\underline{D}(\underline{r},t)}_{\text{interpretiere diesen Term als zusätzlichen Strom}}\Big) = 0$$

„Maxwell'scher Ergänzungs-strom"

Maxwell'sche Ergänzung zur vorherigen Gleichung (4)

$$\nabla \times \underline{H}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r},t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\underline{D}(\underline{r},t)}_{\text{Verschiebungsstrom}}$$

Bedeutung:

~~Nicht~~ Nicht nur eine Stromverteilung, sondern auch ein (sich zeitlich ändernder) elektr. Feld kann ein Magnetfeld erzeugen!

— Umkehrung des Faraday'schen Gesetzes!

Zusammenfassung der „richtigen"
Maxwellgleichungen der Elektrodynamik

$$\nabla \cdot \underline{D}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t)$$

$$\nabla \times \underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}(\underline{r},t)$$

$$\nabla \cdot \underline{B}(\underline{r},t) = 0$$

$$\nabla \times \underline{H}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\underline{D}(\underline{r},t)$$

— Konsistent mit der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t) + \nabla \cdot \underline{j}(\underline{r},t) = 0$$

Bemerkungen:

— Linearität in den Feldern
(Superposition)

— Es kommen nur 1. Ableitungen in der Zeit vor

$\Rightarrow$ Durch Vorgabe der Felder zur Zeit $t=0$ sind die Felder zu einem späteren Zeitpunkt $t>0$ vollständig bestimmt

- In der Dynamik sind elektrische und magnetische Felder gekoppelt $\Rightarrow$ man spricht von „elektromagnet." Feldern

- Die angegeben Gleichunge stimmen auch in Materie!

  — Nur stimmen dort die Beziehunge $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}$

  $\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B}$ so nicht mehr!

IV.4. Energiebilanz-Gleichung in der Elektrodynamik

Wir haben gesehen: Die Maxwell-Gleichung enthalten die Kontinuitätsgleichung

$\Leftrightarrow$ Ladungserhaltung

Frage: Gibt es weitere Erhaltungssätze?

Betrachte dazu:

$$\nabla \times \underline{E} + \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} = 0 \quad \Big| \cdot \underline{H}$$

$$\nabla \times \underline{H} - \frac{\partial}{\partial t}\underline{D} = \underline{j} \quad \Big| \cdot \underline{E}$$

Subtrahiere die so entstehenden Gleichungen:

$$\underbrace{\underline{H}\cdot(\nabla \times \underline{E}) - \underline{E}\cdot(\nabla \times \underline{H})}_{\nabla\cdot(\underline{E}\times\underline{H})} + \underline{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} + \underline{E}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\underline{D} = -\underline{j}\cdot\underline{E}$$

benutze außerdem: $\underline{H} = \mu_0^{-1}\underline{B}$, $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}$

$$\Rightarrow \underline{H}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\underline{B} = \frac{1}{\mu_0}\underline{B}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2\right)$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot(\underline{E}\times\underline{H}) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}(\underline{B}(\underline{r},t))^2 + \frac{\varepsilon_0}{2}(\underline{E}(\underline{r},t))^2\right)$$

$$= -\underline{j}(\underline{r},t)\cdot\underline{E}(\underline{r},t)$$

Definiere den sogenannten Poynting-Vektor

$$\underline{S}(\underline{r},t) = \underline{E}(\underline{r},t) \times \underline{H}(\underline{r},t)$$

definiere außerdem:

$$w(\underline{r},t) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\underline{B}(\underline{r},t)\right)^2$$

„Energiedichte" des elektrodynamischen Feldes!

Erinnerung Elektrostatik:

$$w^{\text{elektr.}}(\underline{r}) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underline{E}(\underline{r})\right)^2$$

analog ergibt sich in der Magnetostatik

$$w^{\text{magnet.}}(\underline{r}) = \frac{1}{2\mu_0}\left(\underline{B}(\underline{r})\right)^2$$

(haben wir nicht hergeleitet)