Wh:
$$\nabla\cdot\underline{D}(\underline{r},t)=\rho(\underline{r},t)$$
$$\nabla\cdot\underline{B}(\underline{r},t)=0$$
3) $$\nabla\times\underline{E}(\underline{r},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}(\underline{r},t)$$ Induktionsgesetz

4) $$\nabla\times\underline{H}(\underline{r},t)=\underline{j}(\underline{r},t)+\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\underline{D}(\underline{r},t)}_{\text{"Verschiebungsstrom"}}$$

Energie-Bilanzgleichung

benutze: $\underline{D}=\varepsilon_0\underline{E}$

$\underline{H}=\mu_0^{-1}\underline{B}$

3) $\cdot\,\underline{H}$ − 4) $\cdot\,\underline{E}$

$$\Rightarrow \nabla\cdot(\underline{E}\times\underline{H})+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}^2+\frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2\right)=-\underline{j}\cdot\underline{E}$$

Erinnerung Elektrostatik:
$$\frac{\varepsilon_0}{2}(\underline{E}(\underline{r}))^2=w(\underline{r})$$
Energiedichte!

Elektrodynamik:
$$w(\underline{r},t):=\frac{\varepsilon_0}{2}(\underline{E}(\underline{r},t))^2+\frac{1}{2\mu_0}(\underline{B}(\underline{r},t))^2$$
Energiedichte des elektrodyn. Felds

Poynting-Vektor: $$\underline{S}(\underline{r},t):=\underline{E}(\underline{r},t)\times\underline{H}(\underline{r},t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} w(\underline{r},t)}_{\text{zeitl. Änderung der Energiedichte}} + \nabla \cdot \underline{S}(\underline{r},t) = -\underline{j}(\underline{r},t) \cdot \underline{E}(\underline{r},t)$$

In integraler Form

$$\frac{d}{dt} \int_V d\underline{r}\; w(\underline{r},t) + \int_V d\underline{r}\; \nabla \cdot \underline{S} = -\int_V d\underline{r}\; \underline{j} \cdot \underline{E}$$

Benutze im 2. Term den Gauß'sche Satz

$$\frac{d}{dt} \int_V d\underline{r}\; w(\underline{r},t) + \int_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{S}(\underline{r},t) = -\int_V d\underline{r}\; \underline{j}(\underline{r},t) \cdot \underline{E}(\underline{r},t)$$

Energiebilanzgleichung (Poynting'sches Theorem)

($\int_V d\underline{r}\; w$ ist die gesamte „Feldenergie" im Volumen V)

Interpretation: Die Feldenergie in einem beliebigen Volumen V kann sich auf 2 Arten ändern

a) durch einen Energiestrom (Strahlung) durch die Oberfläche F_V

$$\oint_{\partial V} d\underline{F} \cdot \underline{S}(\underline{r}, t)$$

$\Rightarrow$ Der Poynting-Vektor heißt auch Energiestromvektor!

b) durch Umwandlung von Feldenergie in Strom bzw. die dazugehörige „Leistungsdichte" $\underline{j} \cdot \underline{E}$

(„mechanische Energie")

Überlegung dazu:

Betrachte Teilchen mit Ladung q im elektromagnet. Feld

$\rightarrow$ es wirkt die Lorentzkraft $\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Verschiebe Teilchen um ein Wegelement $d\underline{r}$

Damit verknüpfte Arbeit

$$dW = \underline{F} \cdot d\underline{r} = q\Big(\underline{E} \cdot d\underline{r} + \underbrace{(\underline{v} \times \underline{B}) \cdot d\underline{r}}_{0}\Big)$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt}$$

$$= q\,\underline{E} \cdot d\underline{r}$$

Zugehörige Leistung:

$$\frac{dW}{dt} = q\,\underline{E} \cdot \frac{d\underline{r}}{dt} = q\,\underline{E} \cdot \underline{v}$$

$$= \underline{j} \cdot \underline{E}$$

$$\frac{d}{dt} \int d\underline{r}\; w(\underline{r},t) + \int_{F_V} d\underline{F} \cdot \underline{S}(\underline{r},t)$$

$$= -\int d\underline{r}\; \underline{j}(\underline{r},t) \cdot \underline{E}$$

Beachte schließlich:

In vielen Metallen ~~Halbleitern~~ gilt

$$\underline{j}(\underline{r},t) = \sigma\, \underline{E}(\underline{r},t)$$

Leitfähigkeit ($\sigma > 0$)

$$-\int_V d\underline{r}\; \underline{j}(\underline{r},t) \cdot \underline{E}(\underline{r},t)$$

$$= -\sigma \int d\underline{r}\, \big(\underline{E}(\underline{r},t)\big)^2 < 0 \quad !$$

In Situationen, in denen der Energiestrom Null ist, wird die Feldenergie typischerweise kleiner (mit der Zeit)

analog zur Energiebilanz kann man auch eine Impulsbilanzgleichung herleiten!

Ausgangspunkt:
betrachte System geladener Teilchen im Magnetfeld

$\Rightarrow$ BWGL für den (mechanischen) Gesamtimpuls des Systems.

$$\frac{d}{dt}\underline{P}^{(Mech)} = $$

Newton

$$= \underbrace{\int_V d\underline{r}\, \rho(\underline{r},t)}\left(\underline{E}(\underline{r},t) + \dot{\underline{r}} \times \underline{B}(\underline{r},t)\right)$$

Dimension Ladung

Führe außerdem den „Feldimpuls" ein

$$\underline{P}^{(Feld)} = \int_V d\underline{r}\left(\underline{D}(\underline{r},t) \times \underline{B}(\underline{r},t)\right)$$

Dann folgt (hier ohne Herleitung)

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{P}^{(Mech)} + \underline{P}^{(Feld)}\right)_i$$

i-te Komponente des Gesamtimpuls

$$= \int dF \sum_{j=1}^{3} \underbrace{T_{ij}}\, n_j$$

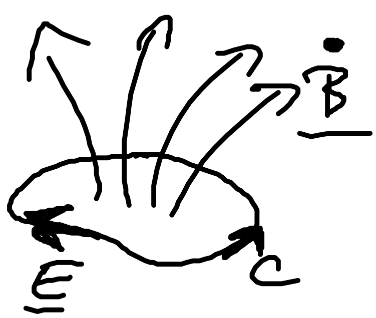
Komponente des Normalenvektors

(ij)-Komponente des „Maxwell'schen Spannungstensors"

$$T_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \mu_0^{-1} B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2}\left(\varepsilon_0 \underline{E}^2 + \mu_0^{-1} \underline{B}^2\right)$$

IV.5. Nochmal zum Faraday'schen Induktionsgesetz

in Kap. IV.2.



$$\oint_C d\underline{r}\cdot\underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{d}{dt}\int_{F_C} d\underline{F}\cdot\underline{B}(\underline{r},t)$$

Ziel jetzt: Erläuterung dessen, was das Induktionsgesetz mit ~~...~~ relativ zueinander bewegten Bezugssystemen zu tun hat!

Aus den experimentellen Befunden von Faraday ergab sich zunächst:

$$\oint_C d\underline{r}\cdot\underline{E} = -\underbrace{K}_{\text{Proportionalitätskonstante}}\frac{d}{dt}\int_{F_C} d\underline{F}\cdot\underline{B} \qquad (*)$$

Verbleibende Frage:

Was ist $\underline{K}$?

$\boxed{\text{s.a. Buch von Nolting}}$

Überlegung dazu:

- Die Kurve C bewegt sich mit konstanter Geschw. $\underline{v}$ relativ zum raumfesten System (Laborsystem)

- Das auf der linken Seite von $\circledast$ auftauchende Feld $\underline{E}$ ist das Feld im mitbewegten Bezugsystem (in dem C ruht)

Eine zeitliche von $\int d\underline{F} \cdot \underline{B}$ kann auf 2 Arten erfolgen:

- explizite zeitl. Änderung von $\underline{B}$
- Positionsänderung von C

Formal: $\frac{d}{dt} \underline{B}(\underline{r}, t) = \frac{\partial \underline{B}(\underline{r}, t)}{\partial t} + (\dot{\underline{r}} \cdot \nabla)\underline{B}$

benutze: (Vektoridentität)

$$\nabla \times (\underline{B} \times \underline{v}) = (\underline{v} \cdot \nabla)\underline{B} \underbrace{- \cancel{(\underline{B} \cdot \nabla)\underline{v}} + \underline{B}\cancel{(\nabla \cdot \underline{v})}}_{\text{Null, da } \underline{v} = \text{const! nach Voraussetzung}} - \underline{v}\underbrace{(\nabla \cdot \underline{B})}_{0}$$

$$= (\underline{v} \cdot \nabla)\underline{B}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underline{B}(\underline{r},t) = \nabla \times (\underline{B} \times \underline{v}) + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{F_C} d\underline{F} \cdot \underline{B}(\underline{r},t) \underset{F_C \text{ konstant}}{=} \int d\underline{F} \cdot \frac{d\underline{B}}{dt} \underset{\text{Stokes}}{=} \int_C d\underline{r} \cdot (\underline{B} \times \underline{v}) + \int d\underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

Einsetzen in ⊛

$$\int d\underline{r} \cdot (\underline{E} - k\, \underline{v} \times \underline{B}) = -k \int d\underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (**)$$

Nehme nun, daß Galilei-Invarianz gilt

$\Leftrightarrow$ Induktionsgesetz ist in allen, mit konstanter Geschwindigkeit $\underline{v}$ relativ zueinander bewegten Bezugssystemen gültig!

(o.K., falls $\frac{v}{c} \ll 1$, also im nichtrelativistischen Bereich!

$\Rightarrow$ (**) gilt insbesondere auch im Fall $\underline{v} = 0$

(Kurve C fest fixiert im Raum $\Leftrightarrow$ Ruhesystem von C ist gleich dem Laborsystem)

aus (**) $\displaystyle\oint_C d\underline{r} \cdot \underline{E}' = -k \int d\underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$

Feld im Laborsystem

$$\Rightarrow \underline{E}' = \underline{E} - k\, \underline{v} \times \underline{B} \Leftrightarrow \boxed{\underline{E} = \underline{E}' + k\, \underline{v} \times \underline{B}}$$

(***)

Gl. (***) verknüpft also die elektr. Felder im Ruhesystem der Kurve C einerseits und dem Laborsystem andererseits

—— involviert $\underline{B}$-Feld!

Aber: Was ist nun K?

Betrachte dazu einzelne Punktladung q
Die Ladung ruht in C
$\Rightarrow$ erfährt in C nur die Kraft $\underline{F} = q\underline{E}$ (da $\underline{v}=0$ im Ruhesystem C)

Im Laborsystem bewegt sich die Ladung, erzeugt Strom

$$\underline{j}(\underline{r}) = q\underline{v}\,\delta(\underline{r}-\underline{R}(t))$$

Kraft auf diesen Strom

$$\underbrace{\int_V d\underline{r}\left(\underline{j}(\underline{r})\times\underline{B}\right)}_{\text{Kraft}} = q\underline{v}\times\underline{B}$$

Gesamtkraft im Laborsystem:

$$\underline{F}' = q\underline{E}' + q\underline{v} \times \underline{B}$$

Nehme wieder Galilei-Invarianz an:

$$\underline{F}' = \underline{F}$$

$$\boxed{\underline{E}' + \underline{v} \times \underline{B} = \underline{E}}$$

Verknüpfung der Felder in den beiden Bezugssystemen!

Vergleiche das mit (***) $\longrightarrow$ $\boxed{k = 1}$!!

q.e.d.

IV. 6. Elektromagnetische Potentiale, Eichungen

Erinnerung an Potentiale im statischen Fall

Elektrostatik

$\nabla \times \underline{E} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$

$\Rightarrow \underline{E} = -\nabla \phi(\underline{r})$ skalares Pot.

$\Delta \phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$

Poisson-Gl.

Magnetostatik:

$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{B} = \nabla \times \underline{A}(\underline{r})$ Vektorpotential

$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 j(\underline{r})$

Falls noch $\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}) = 0$

$\Delta A_i(\underline{r}) = -\mu_0 j_i(\underline{r})$