Wh:
$$\nabla\cdot\underline{D}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t)$$
$$\nabla\cdot\underline{B}(\underline{r},t) = 0$$
3) $$\nabla\times\underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\underline{B}(\underline{r},t)$$ Induktionsgesetz

4) $$\nabla\times\underline{H}(\underline{r},t) = \underline{j}(\underline{r},t) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\underline{D}(\underline{r},t)}_{\text{"Verschiebungsstrom"}}$$

Energie-Bilanzgleichung

Vakuum: $\underline{D} = \varepsilon_0\underline{E}$
$\underline{H} = \mu_0^{-1}\underline{B}$

$3)\cdot\underline{H} - 4)\cdot\underline{E}$

$$\rightarrow \nabla\cdot(\underline{E}\times\underline{H}) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\underline{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\underline{B}^2\right) = -\underline{j}\cdot\underline{E}$$

Erinnerung Elektrostatik:
$$\frac{\varepsilon_0}{2}(\underline{E}(\underline{r}))^2 = w(\underline{r})$$
Energiedichte!

Elektrodynamik

$$w(\underline{r},t) := \frac{\varepsilon_0}{2}(\underline{E}(\underline{r},t))^2 + \frac{1}{2\mu_0}(\underline{B}(\underline{r},t))^2$$

Energiedichte des elektrodyn. Felds

Poynting-Vektor $$\underline{S}(\underline{r},t) := \underline{E}(\underline{r},t)\times\underline{H}(\underline{r},t)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} w(\underline{r},t)}_{\text{Zeitl. Änderung der Energiedichte}} + \nabla\cdot\underline{S}(\underline{r},t) = -\underline{j}(\underline{r},t)\cdot\underline{E}(\underline{r},t)$$

In integraler Form

$$\frac{d}{dt}\int_V d\underline{r}\; w(\underline{r},t) + \int_V d\underline{r}\; \nabla\cdot\underline{S} = -\int_V d\underline{r}\; \underline{j}\cdot\underline{E}$$

Benutze im 2. Term den Gauß'sche Satz

$$\frac{d}{dt}\int_V d\underline{r}\; w(\underline{r},t) + \int_{F_V} d\underline{F}\cdot\underline{S}(\underline{r},t) = -\int_V d\underline{r}\; \underline{j}(\underline{r},t)\cdot\underline{E}(\underline{r},t)$$

Energiebilanzgleichung (Poynting'sches Theorem)

($\int_V d\underline{r}\; w$ ist die gesamte „Feldenergie" im Volumen V)

<u>Interpretation</u>: Die Feldenergie in einem beliebigen Volumen V kann sich auf <u>2</u> Arten ändern

a) durch einen Energiestrom (Strahlung) durch die Oberfläche F_V

$$\oint_{\partial V} d\underline{F} \cdot \underline{S}(\underline{r},t)$$

→ Der Poynting-Vektor heißt auch Energiestromvektor!

b) durch Umwandlung von Feldenergie in Strom bzw. die dazugehörige „Leistungsdichte" $\underline{j} \cdot \underline{E}$

(„mechanische Energie")

Überlegung dazu:

Betrachte Teilchen mit Ladung q im elektromagnet. Feld

→ es wirkt die Lorentzkraft $\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

Verschiebe Teilchen um ein Wegelement $d\underline{r}$

Damit verknüpfte Arbeit

$$dW = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = q\Big(\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r} + \underbrace{(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{r}}_{0}\Big) = q\,\mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

Zugehörige Leistung:

$$\frac{dW}{dt} = q\,\mathbf{E}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = q\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$$

$$= \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$$

$$\frac{d}{dt}\int d\mathbf{r}\; w(\mathbf{r},t) + \oint_{\partial V} d\mathbf{F}\cdot\mathbf{S}(\mathbf{r},t) = -\int d\mathbf{r}\;\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}$$

Beachte schließlich:

In vielen Metallen ~~Halbleitern~~ gilt

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \sigma\,\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$$

Leitfähigkeit ($\sigma > 0$)

$$-\int_V d\mathbf{r}\;\mathbf{j}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\sigma\int d\mathbf{r}\,\big(\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\big)^2 < 0 \;!$$

In Situationen, in denen der Energiestrom Null ist, wird die Feldenergie typischerweise kleiner (mit der Zeit)

analog zur Energiebilanz kann man auch eine Impulsbilanzgleichung herleiten!

Ausgangspunkt:
betrachte System geladener Teilchen im Magnetfeld

→ BWGL für den (mechanischen) Gesamtimpuls des Systems.

$$\frac{d}{dt}\underline{P}^{(\text{Mech})} = \underline{F}$$

$\uparrow$ Newton

$$= \underbrace{\int_V d\underline{r}\, \rho(\underline{r},t)}_{\text{Dimension Ladung}} \left(\underline{E}(\underline{r},t) + \dot{\underline{r}} \times \underline{B}(\underline{r},t)\right)$$

Führe außerdem den „Feldimpuls" ein

$$\underline{P}^{(\text{Feld})} = \int_V d\underline{r}\left(\underline{D}(\underline{r},t) \times \underline{B}(\underline{r},t)\right)$$

Dann folgt (hier ohne Herleitung)

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{P}^{(\text{Mech})} + \underline{P}^{(\text{Feld})}\right)_i$$

i-te Komponente des Gesamtimpulses

$$= \int df \sum_{j=1}^{3} \underbrace{T_{ij}}_{} n_j$$

n_j: Komponente des Normalenvektors

(ij) – Komponente des „Maxwell'schen Spannungstensors"

$$T_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j + \mu_0^{-1} B_i B_j - \frac{\delta_{ij}}{2}\left(\varepsilon_0 \underline{E}^2 + \mu_0^{-1} \underline{B}^2\right)$$

IV.5. Nochmal zum Faraday'schen Induktionsgesetz

in Kap. IV.2.

$$\oint_C d\underline{r}\cdot\underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{d}{dt}\int_{F_C} d\underline{F}\cdot\underline{B}(\underline{r},t)$$

Ziel jetzt: Erläuterung dessen, was das Induktionsgesetz mit relativ zueinander bewegten Bezugssystemen zu tun hat!

Aus den experimentellen Befunden von Faraday ergab sich zunächst:

$$\oint_C d\underline{r}\cdot\underline{E} = -\underbrace{k}_{\text{Proportionalitätskonstante}}\frac{d}{dt}\int_{F_C} d\underline{F}\cdot\underline{B} \qquad (*)$$

Verbleibende Frage:

Was ist $\mathcal{U}$?

$\boxed{\text{s.a. Buch von Nolting}}$

<u>Überlegung dazu:</u>

- Die Kurve C bewegt sich mit konstanter Geschw. $\underline{v}$ relativ zum raumfesten System (Laborsystem)

- Das auf der linken Seite von $\circledast$ auftauchende Feld $\underline{E}$ ist das Feld im mitbewegten Bezugsystem (in dem C ruht)

Eine zeitliche von $\int d\underline{F} \cdot \underline{B}$ kann auf 2 Arten erfolgen:

- explizite zeitl. Änderung von $\underline{B}$
- Positionsänderung von C

Formal: $\frac{d}{dt} \underline{B}(\underline{r},t) = \frac{\partial \underline{B}(\underline{r},t)}{\partial t} + (\dot{\underline{r}} \cdot \nabla)\underline{B}$

benutze: (Vektoridentität)

$$\nabla \times (\underline{B} \times \underline{v}) = (\underline{v}\cdot\nabla)\underline{B} \underbrace{- \cancel{(\underline{B}\cdot\nabla)\underline{v}} + \underline{B}\cancel{(\nabla\cdot\underline{v})}}_{\text{Null, da } \underline{v} = \text{const! nach Voraussetzung}} - \underline{v}\underbrace{(\nabla\cdot\underline{B})}_{0}$$

$$= (\underline{v}\cdot\nabla)\underline{B}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underline{B}(\underline{r},t) = \nabla \times (\underline{B}\times\underline{v}) + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{F_C} d\underline{F}\cdot\underline{B}(\underline{r},t) \underset{F_C \text{ konstant}}{=} \int d\underline{F}\cdot\frac{d\underline{B}}{dt} \underset{\text{Stokes}}{=} \oint_C d\underline{r}\cdot(\underline{B}\times\underline{v}) + \int d\underline{F}\cdot\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

Einsetzen in (*)

$$\oint d\underline{r}\cdot\left(\underline{E} - k\,\underline{v}\times\underline{B}\right) = -k\int d\underline{F}\cdot\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \quad (**)$$

Nehme nun, daß Galilei-Invarianz gilt

$\Leftrightarrow$ Induktionsgesetz ist in allen, mit konstanten Geschwindigkeiten $\underline{v}$ relativ zueinander bewegten Bezugssystemen gültig!

(o.k., falls $\frac{v}{c} \ll 1$, also im nichtrelativistischen Bereich!)

$\rightarrow$ (**) gilt insbesondere auch im Fall $\underline{v} = 0$

(Kurve C fest fixiert im Raum $\Leftrightarrow$ Ruhesystem von C ist gleich dem Laborsystem)

aus (**)

$$\oint_C d\underline{r} \cdot \underline{E}' = -k \int d\underline{F} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

Feld im Laborsystem

$$\Rightarrow \underline{E}' = \underline{E} - k\,\underline{v} \times \underline{B} \Leftrightarrow \boxed{\underline{E} = \underline{E}' + k\,\underline{v} \times \underline{B}}$$

(***)

Gl. (***) verknüpft also die elektr. Felder im Ruhesystem der Kurve C einerseits und dem Laborsystem andererseits

——— involviert $\underline{B}$-Feld!

Aber: Was ist nun K?

Betrachte dazu einzelne Punktladung q

Die Ladung ruht in C

$\Rightarrow$ erfährt in C nur die Kraft $\underline{F} = q\,\underline{E}$ (da $\underline{v}=0$ im Ruhesystem C)

Im Laborsystem bewegt sich die Ladung, erzeugt Strom

$$\underline{j}(\underline{r}) = q\underline{v}\,\delta(\underline{r} - \underline{R}(t))$$

Kraft auf diesen Strom

$$\underbrace{\int d\underline{r}\left(\underline{j}(\underline{r}) \times \underline{B}\right)}_{\text{Kraft}} = q\underline{v} \times \underline{B}$$

Gesamtkraft im Laborsystem:

$$\underline{F}' = q\underline{E}' + q\underline{v}\times\underline{B}$$

Nehme wieder Galilei-Invarianz an!

$$\underline{F}' = \underline{F}$$

$$\boxed{\underline{E}' + \underline{v}\times\underline{B} = \underline{E}}$$

Verknüpfung der Felder in den beiden Bezugssystemen!

Vergleiche das mit $(**)$ $\longrightarrow$ $\boxed{k = 1}$!!

q.e.d.

IV.6. Elektromagnetische Potentiale, Eichungen

Erinnerung an Potentiale im statischen Fall

Elektrostatik

$$\nabla \times \underline{E} = 0 \,, \quad \nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \underline{E} = -\nabla \Phi(\underline{r})$$

skalares Pot.

$$\Delta \Phi(\underline{r}) = -\frac{\rho(\underline{r})}{\varepsilon_0}$$

Poisson-Gl.

Magnetostatik:

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0 \Longrightarrow \underline{B} = \nabla \times \underline{A}(\underline{r})$$

Vektorpotential

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}(\underline{r})$$

Falls noch $\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}) = 0$

$$\Delta A_i(\underline{r}) = -\mu_0 j_i(\underline{r})$$