IV. 6. Elektromagnetische Potentiale, Eichung

$\nabla \times \underline{E} = 0$, $\nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r})$

skalares Potential

$$\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla \phi(\underline{r})$$

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r})$$

Vektorpotential

$\nabla \cdot \underline{B} = 0$, $\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j}$ $\Rightarrow$ $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}(\underline{r})$

mit $\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r}) = 0$ $\longrightarrow$ $\Delta A_i(\underline{r}) = -\mu_0 j_i(\underline{r})$

Coulombeichung $\qquad i = x, y, z$

Wie lautet die Verallgemeinerung auf den dynamischen Fall?

Eine Motivation:

Potentialgleichungen sind manchmal einfacher zu lösen als die Wellengleichungen!

Einführung der Potentiale

$$\nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}, t) = 0$$

$\Rightarrow$ Ansatz wie in der Magnetostatik:

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \nabla \times A(\underline{r}, t) \qquad (*)$$

denn Vektoridentität
$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \underline{A}) = 0$

Setze das in die relevante Maxwellgleichung ein:

$$\nabla \times E(\underline{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{B}(\underline{r}, t)$$

$\circledast$

$$\Rightarrow \nabla \times \underline{E}(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \underline{A}(\underline{r},t))$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left(\underline{E}(\underline{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}(\underline{r},t)\right) = 0 \quad !$$

Ansatz für das elektrische Feld:

$$\boxed{\underline{E}(\underline{r},t) = -\nabla_{\underline{r}}\,\phi(\underline{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}(\underline{r},t)}$$

erfüllt die vorherige Gleichung, da ja $\text{rot}(\text{grad}\,\phi) = 0$

Durch diesen Ansatz sind 2 der vier Maxwell-Gl. automatisch erfüllt!

<u>Eichinvarianzen</u>:

a) Aus $\underline{B}(\underline{r},t) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r},t)$ sieht man sofort, daß $\underline{B}$ sich nicht ändert, falls $\underline{A}(\underline{r},t) \Rightarrow \underline{A}'(\underline{r},t) = \underline{A}(\underline{r},t) + \nabla_{\underline{r}}\varphi(\underline{r},t)$

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \underline{B}'(\underline{r},t)$$

$$\nabla \times \underline{A} = \nabla \times \underline{A}'$$

b) Da jetzt $\underline{A}(\underline{r},t)$ auch in $\underline{E}(\underline{r},t)$, muß $\Phi(\underline{r},t)$ mittransformiert werden!

$$\underline{E}'(\underline{r},t) = -\nabla_{\underline{r}}\Phi'(\underline{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\underline{A}'(\underline{r},t)$$
$$\stackrel{!}{=} \underline{E}(\underline{r},t)$$

mit Ansatz für $\underline{A}'(\underline{r},t)$

$$\Leftrightarrow -\nabla_{\underline{r}}\Phi'(\underline{r},t) - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}(\underline{r},t)} - \nabla_{\underline{r}}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\underline{r},t)$$
$$\stackrel{!}{=} -\nabla_{\underline{r}}\Phi(\underline{r},t) - \cancel{\frac{\partial}{\partial t}\underline{A}(\underline{r},t)}$$

$$\Rightarrow \Phi'(\underline{r},t) \stackrel{!}{=} \Phi(\underline{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\underline{r},t)$$

Also sind folgende Transformationen erlaubt.

$$\underline{A}(\underline{r},t) \longrightarrow \underline{A}'(\underline{r},t) = \underline{A}(\underline{r},t) + \nabla\varphi(\underline{r},t)$$
$$\Phi(\underline{r},t) \longrightarrow \Phi'(\underline{r},t) = \Phi(\underline{r},t) - \frac{\partial}{\partial t}\varphi(\underline{r},t)$$

Eichinvarianz: $\underline{B}' = \underline{B}$!
$\underline{E}' = \underline{E}$

Frage: Welche Eichungen sind zweckmässig ?!

Ziel hier:
größtmögliche Vereinfachung der Maxwell-Gleichungen!

Beachte:
Aus den Def. der Potentiale $\underline{A}$, ϕ folgt sofort: $\nabla \cdot \underline{B} = 0$, $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$

Betrachte die beiden anderen Maxwellgl. ausgedrückt durch die Potentiale

(A) $$\nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r},t) \Leftrightarrow -\Delta_{\underline{r}} \phi(\underline{r},t) - \nabla \dot{\underline{A}} = \frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$$

$$\dot{\underline{A}} = \frac{\partial}{\partial t} \underline{A}(\underline{r},t)$$

$$\nabla \times \underline{B} = \mu_0 j + \mu_0 \varepsilon_0 \dot{\underline{E}}$$

$$\underbrace{\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\underline{A})}_{\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\underline{A}) - \Delta_{\underline{r}} \underline{A}} = \mu_0 j - \mu_0 \varepsilon_0 \nabla \dot{\phi} - \mu_0 \varepsilon_0 \ddot{\underline{A}}$$ (B)

benutze $\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$

Ⓐ $\Delta_{\underline{r}}\, \Phi(\underline{r},t) + \nabla \cdot \dot{\underline{A}}(\underline{r},t) = -\dfrac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$

Ⓑ $\left(\Delta_{\underline{r}} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{A}(\underline{r},t) - \nabla_{\underline{r}}\left(\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r},t) + \dfrac{1}{c^2}\dot{\Phi}(\underline{r},t)\right) = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r},t)$

Man sieht:

Ⓐ und Ⓑ sind gekoppelt

bzgl. der Potentiale $\underline{A}(\underline{r},t)$ und $\Phi(\underline{r},t)$

Diese Gleichungen können durch Eichtransformationen entkoppelt werden!

IV. 6.1. Die Lorentz-Eichung

Wähle „Eichfunktion $\varphi(\underline{r},t)$" so, daß

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r},t) + \varepsilon_0\mu_0 \dot{\Phi}(\underline{r},t) = 0} \qquad \varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Folgerung:

$$\nabla \cdot \dot{\underline{A}}(\underline{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r},t)$$

$$= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\underline{r},t) = -\frac{1}{c^2}\ddot{\phi}(\underline{r},t)$$

Lorentz-Eichung

Folgerungen für die Gleichungen (A) und (B)

(A) $$\Delta_{\underline{r}}\phi(\underline{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(\underline{r},t) = -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$$

(B) $$\Delta_{\underline{r}}\underline{A}(\underline{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{A}(\underline{r},t) = -\mu_0\underline{j}(\underline{r},t)$$

Führe ein $\Box \ldots := \Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ d'Alembertscher Operator

Damit

$$\boxed{\begin{aligned}\Box\,\phi(\underline{r},t) &= -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}\\ \Box\,\underline{A}(\underline{r},t) &= -\mu_0\underline{j}(\underline{r},t)\end{aligned}}$$

Potentialgleichungen in der Lorentzeichung

Bemerkungen

- In der Lorentzeichung sind die Gl. also völlig symmetrisch bzgl. $\underline{A}(\underline{r},t)$ und $\phi(\underline{r},t)$

- Im zeitunabhängigen Fall erhält man bekannte Gleichungen aus der Statik.

$(\Box \to \Delta_{\underline{r}})$
$$\Delta_{\underline{r}} \phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r})$$

$$\Delta_{\underline{r}} \underline{A}(\underline{r}) = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r})$$

IV.C.2. Die Coulomb-Eichung

Wähle die Eichfunktion $\varphi(\underline{r},t)$ so, daß

$$\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r},t) = 0 \qquad (\text{auch } \nabla \cdot \dot{\underline{A}} = 0)$$

Setze dies in die Gl. (A) und (B) ein:

$$\Rightarrow \Delta_{\underline{r}} \phi(\underline{r},t) = -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0}$$

bereits entkoppelt vom Vektorpotential!

und
$$\Box \underline{A}(\underline{r},t) - \frac{1}{c^2}\nabla_{\underline{r}}\dot{\phi} = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r},t)$$

noch gekoppelt!

Umformen der zweiten Gleichung:

benutze, daß wir die Lösung der ersten (Poisson-) Gleichung bereits kennen!

$$\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d\underline{r}' \frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\phi(\underline{r},t) = \dot{\phi} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d\underline{r}' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r}',t)}$$

benutze jetzt die Kontinuitätsgleichung!

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r}',t) = -\nabla'_{} \underline{j}(\underline{r}',t)$$

$$\Rightarrow \dot{\phi} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d\underline{r}' \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \nabla \underline{j}(\underline{r}',t)$$

Setze dies in die Gleichung für $\underline{A}$ ein:

$$\Box\, \underline{A}(\underline{r},t) + \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\nabla}_{\text{Gradient}} \int_V d\underline{r}' \, \frac{\nabla \cdot \underline{j}(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

<u>Zusammenfassend: Potentialgleichungen in der Coulombeichung</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta_{\underline{r}} \Phi(\underline{r},t) &= -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0} \\ \Box_{\underline{r}}\, \underline{A}(\underline{r},t) &= -\mu_0 \underline{j}(\underline{r},t) - \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int_V d\underline{r}' \, \frac{\nabla \cdot \underline{j}(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \end{aligned}}$$

<u>Bemerkungen</u>

- Die erste Gleichung sieht aus wie in der Elektrostatik (Poisson-Gleichung)
- Beide Gleichungen sind entkoppelt
- Die erste Gleichung hat die Lösung

$$\Phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d\underline{r}' \, \frac{\rho(\underline{r}',t)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Potential zur Zeit t ist also durch die Ladungsdichte zur Zeit t bestimmt!

Das skalare Potential in der Coulomb-Eichung ~~ist also~~ entspricht also dem "instantanen" Coulombpotential!

V. Elektromagnetische Wellen

V.1 Freie Wellenausbreitung im Vakuum

Betrachte Raum ohne Ladungen und Ströme
$\rho(\underline{r},t)=0$ $\quad$ $\underline{j}(\underline{r},t)=0$

$\Rightarrow$ Maxwell-Gl. im Vakuum:

$$\boxed{\begin{aligned} \nabla\cdot\underline{D}&=0 \\ \nabla\times\underline{E}&=-\dot{\underline{B}} \\ \nabla\cdot\underline{B}&=0 \\ \nabla\times\underline{H}&=+\dot{\underline{D}} \end{aligned}}$$

$(\underline{D}=\varepsilon_0\underline{E})$

Faraday

$(\underline{H}=\frac{1}{\mu_0}\underline{B})$

Maxwell'scher Verschiebungsstrom

Bemerkungen

- Im zeitunabhängigen Fall ($\dot{\underline{B}} = \dot{\underline{E}} = 0$) wären offensichtlich keine Felder vorhanden $\Longrightarrow$ $\underline{E} = \underline{D} = \underline{B} = \underline{H} = 0$

- Dynamik:

Kopplung zw. elektrischen und magnet. Feldern auch ohne Ladungen und Ströme

$\Longrightarrow$ Die richtigen dynamischen Gleichungen haben auch Lösungen im Vakuum!

Maxwell

„elektromagnetische Wellen" !

V.2. Wellengleichungen im Vakuum und allgemeine Lösungen

Ausgangspunkt: $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}$, $\nabla \times \underline{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \dot{\underline{E}}$

Wende auf beide Gleichungen eine Rotation an

$$\underbrace{\nabla \times (\nabla \times \underline{E})} = \underbrace{-\nabla \times \dot{\underline{B}}}$$

$$\operatorname{grad}(\underbrace{\operatorname{div}\underline{E}}_{0}) - \Delta \underline{E} \quad \underbrace{-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times B)}_{\frac{\partial}{\partial t}\left(-\varepsilon_0\mu_0 \underline{\dot{E}}\right) = -\varepsilon_0\mu_0 \underline{\ddot{E}}}$$

im Vakuum!

$$\Rightarrow \Delta \underline{E} - \underbrace{\varepsilon_0\mu_0}_{1/c^2} \underline{\ddot{E}} = 0$$

$$\Box \underline{E}(\underline{r},t) = 0 \qquad !$$

analog: $\nabla \times (\nabla \times \underline{B}) = \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \underline{B}}_{0}) - \Delta \underline{B} = \varepsilon_0\mu_0 \nabla \times \underline{\dot{E}}$
$= -\varepsilon_0\mu_0 \underline{\ddot{B}}$

$$\Box \underline{B}(\underline{r},t) = 0$$

Beachte: Für die Potentiale in Lorentzeichung gilt im Vakuum-Fall ebenfalls:

$$\Box \Phi(\underline{r},t) = 0$$

$$\Box \underline{A}(\underline{r},t) = 0$$

In allen Fällen ($\underline{E}$, $\underline{B}$, Φ, $\underline{A}$) nennt man die resultierende Gleichung „homogene" Wellengleichung!
(mit $\Box = \Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$)

Allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$\Box\, u(\underline{r},t) = 0$$

u kann sein:
- Komponente von $\underline{E}$, $\underline{B}$, $\underline{A}$
- skalares Potential Φ

man findet:

$$u(\underline{r},t) = \underbrace{F}_{\text{beliebige, 2-mal diff.-bare Funktion}}\big(\underbrace{\tilde{\varphi}(\underline{r},t)}_{\text{Phase}}\big) \quad \text{mit} \quad \tilde{\varphi}(\underline{r},t) = \underbrace{\underline{k}}_{\text{Ausbreitungsvektor}}\cdot\underline{r} - \underbrace{\omega}_{\text{Frequenz}} t$$