# Elektromagnetische Wellen:

$\Box$ = D'Alembert

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

allgemeine Lösung gesucht: $\Box u(\underline{r},t)$

$$u(\underline{r},t) = F(\underbrace{\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t}_{\hat{=}\ \text{Phase } \varphi(\underline{r},t)})$$

Was ist $\underline{k}$? $\underline{k}$ ist der Wellenvektor
ist der Ausbreitungsvektor

$$\nabla_{\underline{r}}\, \varphi(\underline{r},t) = \underline{k}\ \text{, d.h. } \underline{k} \nearrow$$

F muß eine beliebige, aber zweifach stetig-differenzierbare Fkt. sein in Bezug $\underline{r}$ und $t$

$$\Box u(\underline{r},t) = \Box F(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$$

$$= \left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) F(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$$

$$= (\underline{k}^2)\, F''(\varphi) - \frac{\omega^2}{c^2} F''(\varphi) = 0$$

$$= \underbrace{\left(\underline{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)}_{=0} F''(\varphi) = 0$$

das ist die Dispersionsrelation

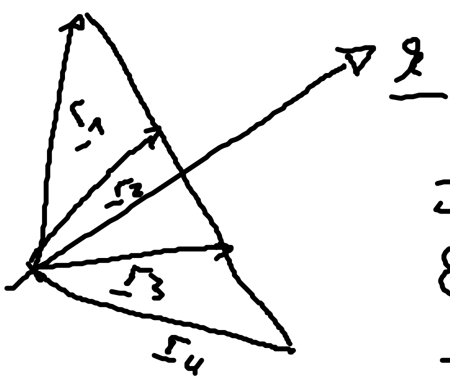
$$\omega = c\,|\underline{k}|$$ (im Vakuumfall)

<u>Diskussion</u> : die Phase $\varphi = \underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t$

konstante Phase

$$\varphi(\underline{r}, t) = \text{const.} = \varphi_0 = \underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t$$

Bedeutet für eine Momentaufnahme:




Für alle $\underline{r}_i$ gilt $\underline{k}\cdot\underline{r}_i = \text{const.}$

Flächen konstanter Phase sind Ebenen im Raum

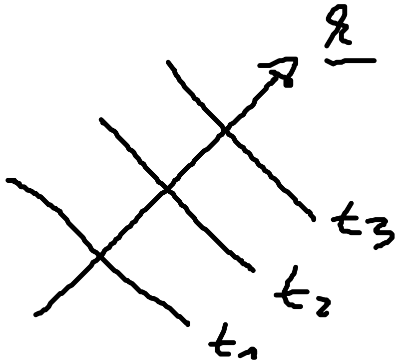
$\longrightarrow$ „ebene Wellen"

Betrachte die Bewegung als Fkt. der Zeit:

$$\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t - \varphi_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{k}\cdot\underbrace{\left(\underline{r} - \frac{\underline{k}}{\underline{k}^2}(\omega t + \varphi_0)\right)}_{\text{als Fkt. } r(t) \text{ beschreibt}} = 0$$

die Ausbreitung der Ebene ≙ Orte gleicher Phase




$$\underline{r}(t) = \underline{k}\,\frac{1}{k^2}(\omega t + \varphi_0)$$

Bewegung als Fkt. der Zeit

Definition der Phasengeschwindigkeit:

$$\underline{v}_{ph} = \frac{d\underline{r}}{dt}\Big|_{\varphi = const} = \underline{k}\,\frac{\omega}{k^2} = \underline{k}\,\frac{c|\underline{k}|}{k^2}$$

$$= c\,\frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$$

Einheitsvektor in $\underline{k}$-Richtung

Die ebenen Wellen breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus. (Vakuum-Fall)

Allg. Def.: $|\underline{v}_{ph}| = \frac{\omega(k)}{k}$, Richtung bleibt $\frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$

<u>Spezielle Klasse</u>:

harmonischen ebenen Wellen

$$u(\underline{r},t) = u(\underline{k})\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}$$

Amplitude

Schwingungsanteil

Diese Klasse ist periodisch im Raum <u>und</u> Zeit.

2.2.: feste Zeit $t = t_0$ $\quad u(\underline{r}, t_0) = u(\underline{r} + \Delta\underline{r}, t_0)$

Annahme: $\Delta\underline{r} = \frac{\underline{k}}{k^2} \cdot 2\pi n$, wobei $n \in \mathbb{Z}$

$$u(\underline{r} + \Delta\underline{r}, t_0) = u(\underline{k})\, e^{i\left(\underline{k} \cdot \left(\underline{r} + \frac{\underline{k}}{k^2} 2\pi n\right) - \omega t\right)}$$

$$= u(\underline{k})\, e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t) + i 2\pi n}$$

ändert nichts an $u(\underline{r}, t_0)$,

da $e^{i2\pi n} = 1$, also periodisch

im Raum

festes Ort: $\underline{r} = \underline{r}_0$, zu zeigen, gilt auch in der Zeit

$$u(\underline{r}_0, t) = u(\underline{r}_0, t + \Delta t), \quad \Delta t = \frac{2\pi}{\omega} \cdot n, \; n \in \mathbb{Z}$$

also auch periodisch in der Zeit.

Man definiert: $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ "Periode"

bzw. „Schwingungsdauer"

$\lambda = \frac{2\pi}{|\underline{k}|}$ „Wellenlänge"

Dispersionsrelation: $\omega = c|\underline{k}| \rightarrow c = \frac{1}{\tau}$

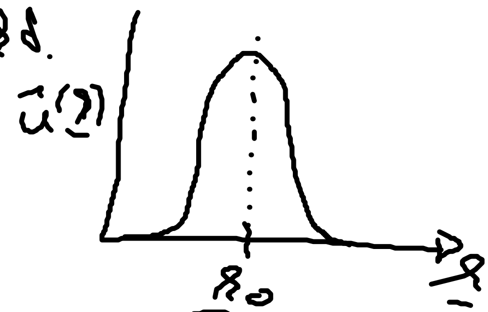
<u>Beachte</u>: Da eine harmonische Welle die Wellengl. löst, und die Wellengl. linear ist, folgt die Möglichkeit des Superpositionsprinzip.

$$u(\underline{r},t) = \int d^3k\; \hat{u}(\underline{k})\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega(\underline{k})t)}$$

das ist eine Lösung der W.gl.

$\hat{u}(\underline{k})$ ist eine Gewichtungsfkt.

im allg. (in der Praxis) eignet sich eine stark lokalisierte Gewichtungsfkt.




im Falle der Lokalisierung:

$u(\underline{k})$ klein für $\underline{k} \neq \underline{k}_0$

$\rightarrow$ Taylorentwicklung der Phase um $\underline{k}_0$ $\quad \varphi(\underline{k}) = \underline{r}\cdot\underline{k} - \omega(\underline{k})\, t$

$\uparrow$ ist nicht wirklich bekannt

$$\varphi(\underline{k}) \simeq \varphi(\underline{k}_0) + (\underline{k} - \underline{k}_0)\cdot\left[\nabla_{\underline{k}}\, \varphi(\underline{k})\right]_{\underline{k}=\underline{k}_0}$$

$$\simeq \underline{k}_0 \cdot \underline{r} - \omega(\underline{k}_0)\, t + (\underline{k} - \underline{k}_0) \cdot \left( \underline{r} - \left( \nabla_{\underline{k}}\, \omega(\underline{k}) \right)\Big|_{\underline{k}=\underline{k}_0} \cdot t \right)$$

Definition der Gruppengeschwindigkeit:

$$\underline{v}_g = \left( \nabla_{\underline{k}}\, \omega(\underline{k}) \right)\Big|_{\underline{k}=\underline{k}_0}$$

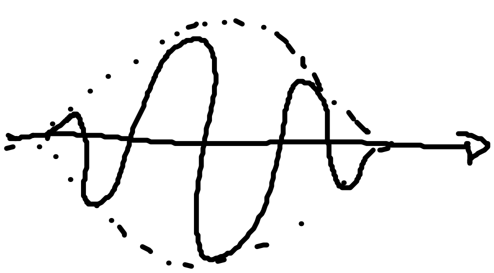
allg.:

$$\varphi(\underline{k}) \approx \underline{k}_0 \cdot \underline{r} - \underbrace{\omega_0}_{=\omega(\underline{k}_0)} t + \underbrace{(\underline{k} - \underline{k}_0)}_{= \tilde{\underline{k}}} \cdot (\underline{r} - \underline{v}_g t)$$

einsetzen in die allg. Lösung:

$$u(\underline{r}, t) = \underbrace{e^{i(\underline{k}_0 \cdot \underline{r} - \omega_0 t)}}_{\substack{\text{„Trägerwelle"} \\ \text{mit Phasengeschw.} \\ |\underline{v}_{ph}| = \frac{\omega_0}{k_0}}} \underbrace{\int d^3\tilde{\underline{k}}\, \hat{u}(\underline{k}_0 + \tilde{\underline{k}})\, e^{i\tilde{\underline{k}}(\underline{r} - \underline{v}_g t)}}_{\substack{\text{„Einhüllende"} \\ \text{des Maximums} \\ \text{bewegt sich mit} \\ \text{der Gruppengeschw.}}}$$

also: Näherung ist umso besser, je schärfer lokalisiert $\hat{u}(\underline{k})$ ist.



$\frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$, beachte im Vakuum gilt $\omega(\underline{k}) = c\,|\underline{k}|$

also $\boxed{|v_{ph}| = |v_g| = c}$

# V.2 Transversalität von Wellen im Vakuum

Betrachte nun die folgenden Lsg. im Vakuum

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \underline{B}_0\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

mit folgenden
$$\left.\begin{array}{l}\underline{E}_0(\underline{r},t) \equiv \underline{E}_0 \\ \underline{B}_0(\underline{r},t) \equiv \underline{B}_0\end{array}\right\}$$ i.a. komplexe Zahlen

Wir wissen, daß
$$\Box\, \underline{E}(\underline{r},t) = 0$$
$$\Box\, \underline{B}(\underline{r},t) = 0$$

Frage: Wie stehen die Vektoren $\underline{E}_0, \underline{B}_0, \underline{k}_0$ relativ zueinander?

$\longrightarrow$ Antwort Maxwellschen Gleichung

Beachte: Erfüllung der Wellengleichung nicht äquivalent mit Erfüllung der Maxwellgl.

Vakuum:

① $\nabla\cdot\underline{E} = 0$

② $\nabla\cdot\underline{B} = 0$

③ $\nabla \times \underline{E} = -\partial_t \underline{B}$

④ $\nabla \times \underline{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \underline{E}$

Lösungen einsetzen:

$$\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r}, t) = \nabla \cdot \left( \underline{E}_0 e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)} \right)$$

$$= \underbrace{\underline{E}_0 \cdot \underline{k}}_{=0} \, i \, \underbrace{e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}}_{\text{i. allg. } \neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{E}_0 \cdot \underline{k} = 0 \qquad \underline{E}_0 \perp \underline{k}$$

$$\nabla \cdot \underline{B}(\underline{r}, t) = 0 \Longrightarrow \underline{B}_0 \perp \underline{k}$$

also
$$\boxed{\begin{aligned} \underline{k} \cdot \underline{E}_0 &= 0 \\ \underline{k} \cdot \underline{B}_0 &= 0 \end{aligned}}$$

hieraus folgt: Elektromagnetische Wellen sind transversal (im Vakuum)

$\underline{B}$ ist immer transversal

$\underline{E}$ ist nicht immer transversal, da $\nabla \cdot \underline{E} \neq 0$ (i. allg.)

<u>Weitere Folgerungen:</u>

$$\nabla \times \underline{E} + \dot{\underline{B}} = 0$$

$$\underbrace{\left( i\,\underline{k} \times \underline{E}_0 - i\,\omega\,\underline{B}_0 \right)}_{\Rightarrow \; = 0} \underbrace{e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)}}_{\neq 0 \text{ (i.a.)}} = 0$$

im Vakuum $\omega = c\,|\underline{k}|$

$$\omega\,\underline{B}_0 = \underline{k} \times \underline{E}_0$$

$$\underline{B}_0 = \frac{1}{c}\left( \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|} \times \underline{E}_0 \right)$$

__ebenso__: $\nabla \times \underline{B} - \frac{1}{c^2}\dot{\underline{E}} = 0 \longrightarrow \underline{E}_0 = -c\left( \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|} \times \underline{B}_0 \right)$

$\longrightarrow$ $\underline{E}_0, \underline{B}_0, \underline{k}$ stehen jeweils senkrecht aufeinander

und bilden ein orthogonales Rechtssystem. (wie $\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z$)

__Beispiel__: Ausbreitungsrichtung $\frac{\underline{k}}{|\underline{k}|} \parallel \underline{e}_z$

$$\underline{k} = k\,\underline{e}_z$$

eine mögliche Lösung der Maxwellgleichungen:

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \left( E_{0,x}\,\underline{e}_x + E_{0,y}\,\underline{e}_y \right) e^{i(kz)}$$

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \frac{1}{c}\left( -E_{0,y}\,\underline{e}_x + E_{0,x}\,\underline{e}_y \right) e^{i(kz - \omega t)}$$

beachte: offensichtlich ist die ebene Welle allein durch seinen Vektor $\underline{E}_0, \underline{B}_0$ bestimmt!