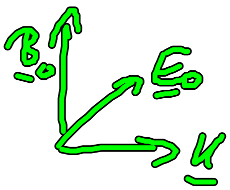
Wh: $\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 \exp[i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)]$

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \underline{B}_0 \exp[i(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)]$$

$$\underline{k}\cdot\underline{E}_0 = 0 \; ; \; \underline{k}\cdot\underline{B}_0 = 0 \; , \; \underline{B}_0 = \frac{1}{c}\left(\frac{\underline{k}}{k} \times \underline{E}_0\right)$$



z.B.: $\underline{k} = k\,\hat{\underline{e}}_z \longrightarrow \underline{E}(\underline{r},t) = (E_{0x}\,\hat{\underline{e}}_x + E_{0y}\,\hat{\underline{e}}_y) \cdot e^{ikz-\omega t}$

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \frac{1}{c}(-E_{0y}\,\hat{\underline{e}}_x + E_{0x}\,\hat{\underline{e}}_y)\, e^{ikz-\omega t}$$

V.3. Polarisation ebener Wellen

betrachte wieder Welle mit $\underline{k} = k\,\hat{\underline{e}}_z$

$$\underline{E}(\underline{r},t) = (E_{0,x}\,\hat{\underline{e}}_x + E_{0,y}\,\hat{\underline{e}}_y)\, e^{ikz-\omega t}$$

Die Amplituden $E_{0,x}$ und $E_{0,y}$ sind i.a. komplex!

$$E_{0x} = a_x e^{i\alpha_x}$$

$$E_{0y} = a_y e^{i\alpha_y} \qquad a_x, a_y, \alpha_x, \alpha_y \text{ reell}$$

Beachte: Das <u>physikalische</u> E-Feld ist reell!

$$\underline{E}(\underline{r},t) \stackrel{!}{=} E_x(\underline{r},t)\,\underline{e}_x + E_y(\underline{r},t)\,\underline{e}_y$$

$$\Rightarrow E_x^{(r,t)} = \mathrm{Re}\left(E_{0x}\, e^{i(kz-\omega t)}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(a_x\, e^{i\delta_x + ikz - i\omega t}\right)$$

$$(1) \quad = a_x \cos(\underbrace{kz-\omega t}_{\varphi} + \delta_x)$$

analog

$$E_y(z,t) = \mathrm{Re}\left(E_{0,y}\, e^{i(kz-\omega t)}\right)$$

$$(2) \quad = a_y \cos(\underbrace{kz-\omega t}_{\varphi} + \delta_y)$$

$$\Rightarrow (1): \quad \frac{E_x}{a_x} = \cos(\varphi+\delta_x) = \cos\varphi\cos\delta_y - \sin\varphi\sin\delta_y$$

$$(2) \quad E_y/a_y = \cos\varphi\cos\delta_y - \sin\varphi\sin\delta_y$$

Eliminiere nun die Abhängigkeit von φ und damit die Orts- und Zeitabhängigkeit!

$$\Rightarrow \frac{E_x}{a_x}\sin\delta_y - \frac{E_y}{a_y}\sin\delta_x$$

$$= \cos\varphi\cos\delta_x\sin\delta_y - \cancel{\sin\varphi\sin\delta_x\sin\delta_y}$$

$$- \cos\varphi\cos\delta_y\sin\delta_x + \cancel{\sin\varphi\sin\delta_y\sin\delta_x}$$

I

$$= \cos\varphi\sin(\delta_y - \delta_x)$$

analog: $\frac{E_x}{a_x}\cos\delta_y - \frac{E_y}{a_y}\cos\delta_x = \sin\varphi\sin(\delta_y - \delta_x)$ II

führe ein:

$$\delta = \delta_y - \delta_x$$

$\mathrm{I}^2 + \mathrm{II}^2$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{a_x}\right)\left(\frac{E_y}{a_y}\right)\cos\delta = \sin^2\delta}$$

(*)

mit δ: Phasendifferenz zw. x- und y-Komponente des $\underline{E}$-Feldes!

mathematisch ist die Gleichung

eine Ellipsengleichung!

Spezialfälle

a) Lineare Polarisation

$$\delta = \delta_y - \delta_x = 0 \quad \text{oder} \quad \delta = \pm \pi$$

$$\Rightarrow \sin\delta = 0 \, , \quad \cos\delta = \pm 1$$

aus (*)

$$\left(\frac{E_x}{a_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_y}\right)^2 \pm 2\left(\frac{E_x}{a_x}\right)\left(\frac{E_y}{a_y}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{E_x}{a_x} \pm \frac{E_y}{a_y} = 0}$$

Aussage unabhängig von Zeit und Ort!

Wir hatten als Ansatz:

$$\underline{E}(\underline{r},t) = E_x(\underline{r},t)\,\hat{\underline{e}}_x + E_y(\underline{r},t)\,\hat{\underline{e}}_y$$

$$= a_x \cos(\varphi + \delta_x)\,\hat{\underline{e}}_x$$

$+ a_y \cos(\varphi + \delta_y)\,\underline{\hat{e}}_y$

$\varphi = kz - \omega t)$

mit <u>linearer Polarisation</u>

$$\underline{E}(\underline{r},t) = (a_x \underline{\hat{e}}_x \pm a_y \underline{\hat{e}}_y)\cos(kz - \omega t + \delta_x)$$

Interpretation: Der Vektor $\underline{E}(\underline{r},t)$ schwingt in <u>fester</u> Richtung relativ zu $\underline{k}$

<u>b) Zirkular polarisierte Welle</u>

$$\delta = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\delta = \pm 1 \quad , \quad \cos\delta = 0$$

nehme zusätzlich an, daß $a_x = a_y = a$

$$\Rightarrow \left(\frac{E_x}{a}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{a}\right)^2 = 1 \iff \boxed{E_x^2 + E_y^2 = a^2}$$

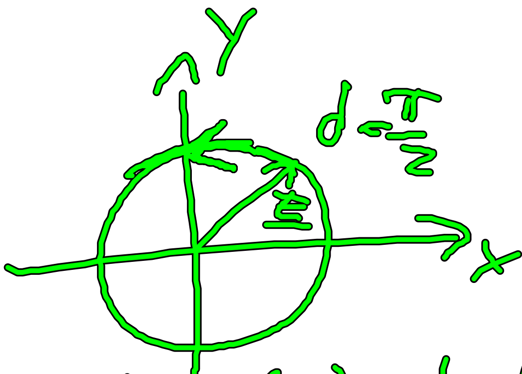
Kreisgleichung!

$\underline{E}$-Feld bewegt sich also auf einem Kreis!

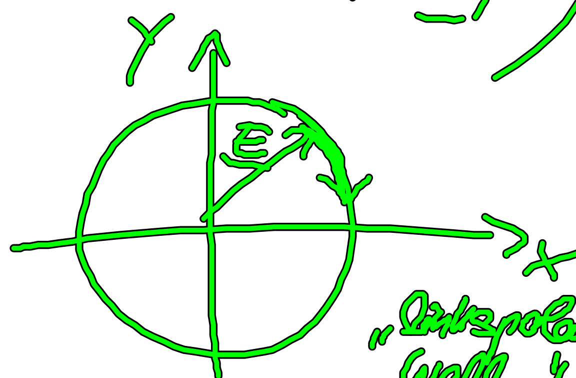
Gesamtfeld:

$$\underline{E}(\underline{r},t) = a\cos(kz-\omega t+\delta_x)\,\hat{\underline{e}}_x \pm a\cos\left(kz-\omega t+\delta_x+\frac{\pi}{2}\right)\hat{\underline{e}}_y$$

$$= a\left(\cos(kz-\omega t+\delta_x)\,\hat{\underline{e}}_x \pm \sin(kz-\omega t+\delta_x)\,\hat{\underline{e}}_y\right)$$



„rechtspolarisierte Welle"



„linkspolarisierte Welle"

Bemerkungen:

- Zirkular polarisierte Wellen können als Überlagerung von 2 linear polarisierten Wellen, die um $\frac{\pi}{2}$ verschoben sind, betrachtet werden!

- Alle anderen Fälle (als den Fall linear und zirkularer Polarisation) nennt man elliptische Polarisation

V.4. Energie elektromagnetischer Wellen

Betrachte reelle Wellen

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0 \cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$$

reell

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \underline{B}_0 \cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t)$$

reell

mit $\underline{B}_0 = \frac{1}{c}\left(\frac{\underline{k}}{k} \times \underline{E}_0\right)$

Energiedichte

$$w(\underline{r},t) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\underline{B}(\underline{r},t)\right)^2$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2 \cdot \frac{1}{c^2}$$

$$= \varepsilon_0\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2$$

$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$

Zugehörige Energiestromdichte
(Poynting-Vektor)

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H} = \underline{E} \times \frac{1}{\mu_0}\underline{B}$$

$\boxed{\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}}$

$$= \frac{1}{c\mu_0}\left(\underline{E} \times \left(\frac{\underline{k}}{k} \times \underline{E}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \underline{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\underline{E}(\underline{r},t)\right)^2 \cdot \frac{\underline{k}}{k}$$

Kombiniere das mit dem Ausdruck für die Energiedichte

$$\boxed{\underline{S}(\underline{r},t) = c\, w(\underline{r},t)\, \frac{\underline{k}}{k}}$$

Interpretation:

Im Vakuum (keine Ladungen, keine Ströme) wird die Energie mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung des Wellenvektors transportiert!

V. 5. Erzeugung elektromagnetischer Wellen

Bisher haben wir nur die Ausbreitung von Wellen im Vakuum diskutiert, nicht aber ihre Erzeugung!

Erzeugung

$\Longleftrightarrow$ zeitabhängige Ladungen und Ströme

Betrachte dazu die Gleichungen für die elektromagnetischen Potentiale $\Phi(\underline{r},t)$ und $\underline{A}(\underline{r},t)$

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r},t)$$

$$\underline{E}(\underline{r},t) = -\nabla\Phi(\underline{r},t) - \underbrace{\dot{\underline{A}}(\underline{r},t)}_{\frac{\partial A(\underline{r},t)}{\partial t}}$$

Lorentz-Eichung: $\nabla \cdot \underline{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\Phi} = 0$

Damit:

$$\boxed{\begin{aligned} \Box\, \Phi(\underline{r},t) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r},t) \\ \Box\, \underline{A}(\underline{r},t) &= -\mu_0 \underline{j}(\underline{r},t) \end{aligned}}$$

Potentialgleichungen in der Lorentz-Eich.

mit $\Box = \Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

„inhomogene Wellengleichungen"

Aufgabe: Lösung dieser Gleichung für gegebene Ladungen und Ströme!

Annahme: Keine Randbedingungen,

außer $\Phi, \underline{A} \to 0$

für $r \to \infty$

Abstand von den Ladungs- und Stromverteilungen

V, 5.1. Formale Lösung

wir benutzen das Konzept der Green'schen Funktion
— wie in der Elektrostatik!

Erinnerung Elektrostatik.

$$\Delta_{\underline{r}} \Phi(\underline{r}) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\underline{r})$$

Poisson-Gleichung

Lösung:

$$\Phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d\underline{r}' \, \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$= \int d\underline{r}' \, G(\underline{r}-\underline{r}') \, \rho(\underline{r}')$$

Faltung im Raum

mit $G(\underline{r}-\underline{r}') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$

es gilt:

$$\Delta_{\underline{r}} G(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{1}{\varepsilon_0} \underline{\delta(\underline{r}-\underline{r}')}$$

Ladungsdichte einer
„Einheits-Punktladung"

Dynamischer Fall

sei $u(\underline{r},t) = \phi(\underline{r},t)$ oder $u(\underline{r},t) = A_\alpha(\underline{r},t)$

sei $f(\underline{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\underline{r},t)$

oder $f(\underline{r},t) = \mu_0 j_\alpha(\underline{r},t)$

α-Komponente des Vektorpotentials

Zu lösen:

$$\boxed{\Box u(\underline{r},t) = -f(\underline{r},t)}$$

<u>Ansatz:</u>

$$u(\underline{r},t) = \int_V d\underline{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\, f(\underline{r}',t')$$

Faltung in <u>Raum und Zeit</u>!

Damit dieser Ansatz die inhomogene Gleichung löst,

muß gelten

$$\boxed{\Box G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')\,\delta(t-t')}$$

mit $\Box = \Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$

Physikalische Interpretation:

G ist das Potential, ~~dass~~ das von einer punktförmigen Einheitsladung am Ort $\underline{r}'$ zur Zeit t' erzeugt wird!!

Beachte:

Es muß das sogenannte Kausalitätsprinzip erfüllt sein:

d.h. die Welle $u(\underline{r},t)$ soll nur durch Quellen in der Vergangenheit bestimmt sein; zukünftige Zeiten sollten keine Rolle spielen!

d.h. $G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = 0$ für $t<t'$