7. Übungsblatt:

- Abgabe 13.12.2011

- Aufgabe 17

  ... Zeigen Sie, dass die rechte Seite von (1)

Wh: Inhomogenen Potentialgleichungen / Lorenzeichung

$$\Box \phi(\underline{r},t) = -\frac{\rho(\underline{r},t)}{\varepsilon_0} \quad \text{mit } \Box = \Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\Box \underline{A}(\underline{r},t) = -\mu_0 \underline{j}(\underline{r},t)$$

zu lösen also allgemein: $\Box u(\underline{r},t) = -f(\underline{r},t)$

Ansatz:

Faltung im Raum und Zeit!

$$(*) \quad u(\underline{r},t) = \int d\underline{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \cdot f(\underline{r}', t')$$

Green'sche Funktion!

Kausalität: nur die Vergangenheit soll eine Rolle spielen, aber nicht die Zukunft!

$$g(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \overset{!}{=} 0 \quad \text{für } t<t'$$

Beachte:
Der Ansatz (*) soll die Diff.gl. $\Box u(\underline{r},t) = -f(\underline{r},t)$ erfüllen!

$$\Box G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta(\underline{r}-\underline{r}')\delta(t-t')$$

Ziel nun: Bestimmung von $G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$

1. Schritt: Fouriertransformation.

$$f(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\underline{k}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \hat{f}(\underline{k},\omega)\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

$$u(\underline{r},t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d\underline{k}\int d\omega\, \hat{u}(\underline{k},\omega)\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

(Rück-Trafo: $\hat{u}(\underline{k},\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\underline{r}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, u(\underline{r},t)\, e^{-i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$

$$\Box u(\underline{r},t) = \left(\Delta_{\underline{r}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u(\underline{r},t)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\underline{k}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \hat{u}(\underline{k},\omega)\, \underbrace{\Box e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}}_{-\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\cdot e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}}$$

$$\overset{!}{=} -f(\underline{r},t)$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\underline{k}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \; \hat{f}(\underline{k},\omega)\, e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

Durch Vergleich folgt:

$$-\left(k^2-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)\hat{u}(\underline{k},\omega) = -\hat{f}(\underline{k},\omega)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\hat{u}(\underline{k},\omega) = \frac{1}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\hat{f}(\underline{k},\omega)}$$

$\hat{G}(\underline{k},\omega)$ Fouriertransformierte der Green'schen Fkt!

Rücktransformation:

$$u(\underline{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\underline{k}\int d\omega\ \tilde{u}(\underline{k},\omega)e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d\underline{k}\int d\omega\ \frac{1}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}\underbrace{\hat{f}(\underline{k},\omega)}_{\frac{1}{(2\pi)^2}\int d\underline{r}'\int dt'\, f(\underline{r}',t')\, e^{-i(\underline{k}\cdot\underline{r}'-\omega t')}} e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

$$\overset{!}{=} \int d\underline{r}'\int dt'\ G(\underline{r}-\underline{r}',t-t')f(\underline{r}',t')$$

$\circledast$

$$\longrightarrow G(\underline{r}-\underline{r}',t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d\underline{k}\int d\omega \cdot e^{i(\underline{k}\cdot(\underline{r}-\underline{r}')-\omega(t-t'))}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}$$

Umschreiben: $\hat{\tau} = t - t'$

$\underline{s} = \underline{r} - \underline{r}'$

$$G(\underline{s}, \hat{\tau}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\underline{k} \int d\omega \, \frac{e^{i(\underline{k}\cdot\underline{s} - \omega\hat{\tau})}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\underline{k} \; e^{i\underline{k}\cdot\underline{s}} \; \Gamma(\underline{k}, \hat{\tau})$$

$$\text{mit } \Gamma(\underline{k}, \hat{\tau}) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{-i\omega\hat{\tau}}}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Betrachte zunächst die Funktion $\Gamma(k, \hat{\tau})$

- Kausalität bedeutet

$$\Gamma(\underline{k}, \hat{\tau}) \overset{!}{=} 0$$

für $\hat{\tau} < 0$

$\Leftrightarrow t - t' < 0$

$t < t'$

- Nenner im Integrande ~~w~~ von $\Gamma(\underline{k}, \tau)$ wird Null für $\omega = \pm \underbrace{ck}_{\omega_0}$

umschreiben:

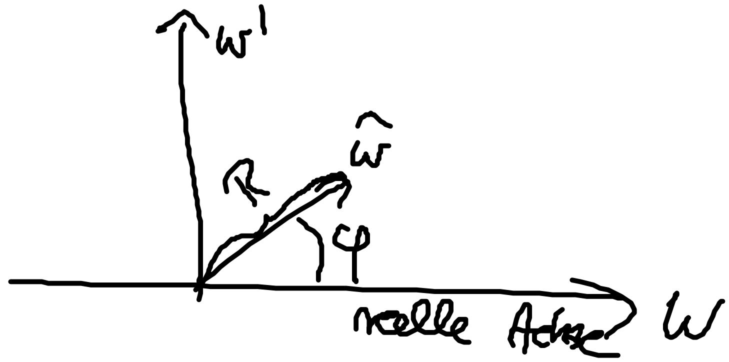
$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = \left(k - \frac{\omega}{c}\right)\left(k + \frac{\omega}{c}\right) = \frac{1}{c^2}(kc - \omega)(kc + \omega)$$
$$= \frac{1}{c^2}(\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega)$$

$$= \frac{1}{c^2}(\omega_0^2 - \omega^2)$$

Wie geht man mit den Polen bei $\omega = \pm \omega_0$ um?

„Ausweg": <u>Komplexe Integration</u>

Idee: Ersetze das Integral über die reellen Frequenzen ω durch ein Kurvenintegral in der komplexen Zahlenebene!



Realteil — Imaginärteil

⇒ Komplexe Frequenzen $\hat{\omega} = \omega + i\omega'$

$= R e^{i\varphi}$

mit $R = \sqrt{\omega^2 + \omega'^2}$

$\tan\varphi = \frac{\omega'}{\omega}$

Ersetze das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, f(\omega) \longrightarrow \oint d\hat{\omega}\, f(\hat{\omega})$$

Dabei ist zu beachten:

1) Beitrag des Kurvenstücks jenseits der reellen Achse muß verschwinden!

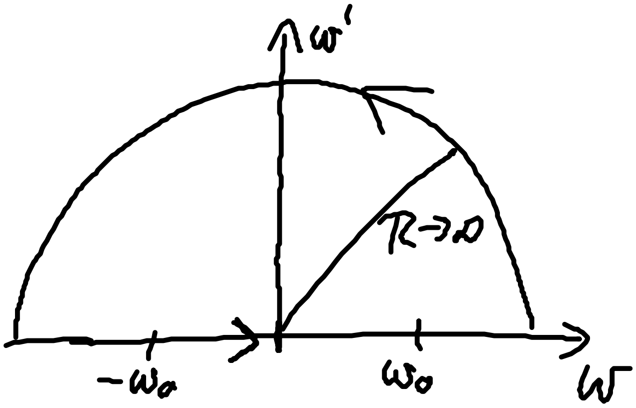
(sonst $\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \longrightarrow \oint d\hat{\omega}$ nicht zulässig)

2) Kausalität:

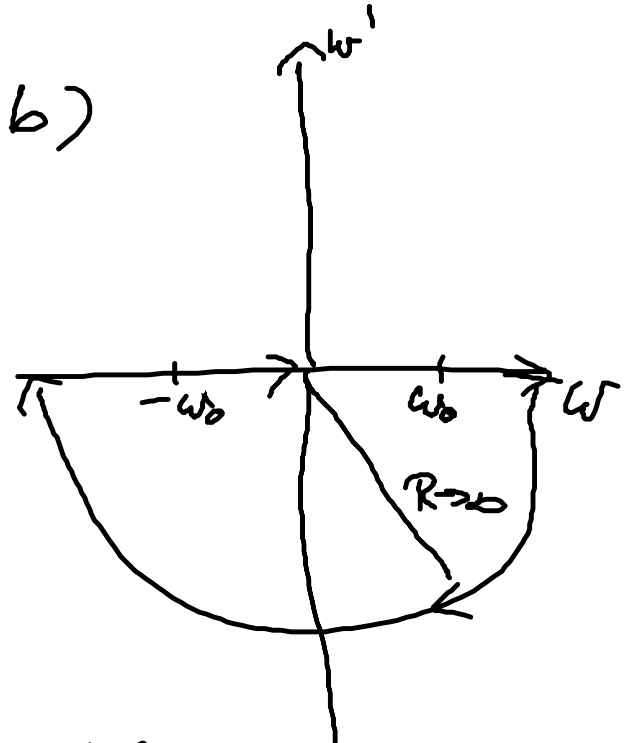
Wir müssen gewährleisten, dass das ganze Integral für $\hat{\tau}<0$ verschwindet!

Zu 1) Es gibt 2 Möglichkeiten der Kurvenführung

a)



b)



Auf dem oberen Halbkreis gilt: $0<\varphi<\pi$

Auf dem unteren Halbkreis: $\pi<\varphi<2\pi$

Integrand von $\Gamma(\underline{k},\hat{\tau})$: $\dfrac{e^{-i\hat{\omega}\hat{\tau}}}{\frac{1}{c^2}(\omega_0^2-\hat{\omega})}$

muß auf dem Halbkreis (d.h. jenseits der reellen Achse verschwinden!)

$$\lim_{R\to\infty} e^{-i\overset{\text{komplex}}{\tilde{\omega}}\tau} = \lim_{R\to\infty}\left(e^{-i\overbrace{R\cos\varphi}^{\omega}\cdot\tau}\, e^{\overbrace{R\sin\varphi}^{\omega'}\tau}\right)$$

- Für beiden Kurven a) und b) nimmt $\cos\varphi$ sowohl positive als auch negative Werte an!

- Im Bereich $0<\varphi<\pi$ (Kurve a))

  ist $\sin\varphi > 0$

  Damit der Integrand verschwindet, muß $\tau<0$ sein!

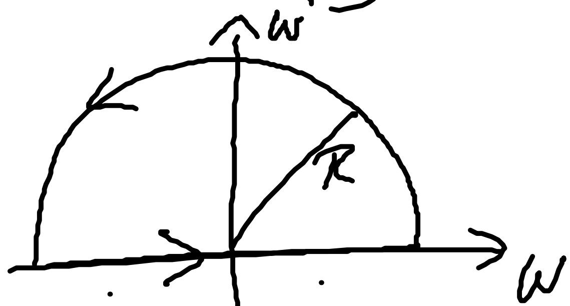
- Im Bereich $\pi<\varphi<2\pi$ (Kurve b))

  ist $\sin\varphi<0 \Rightarrow \tau$ muß positiv sein!

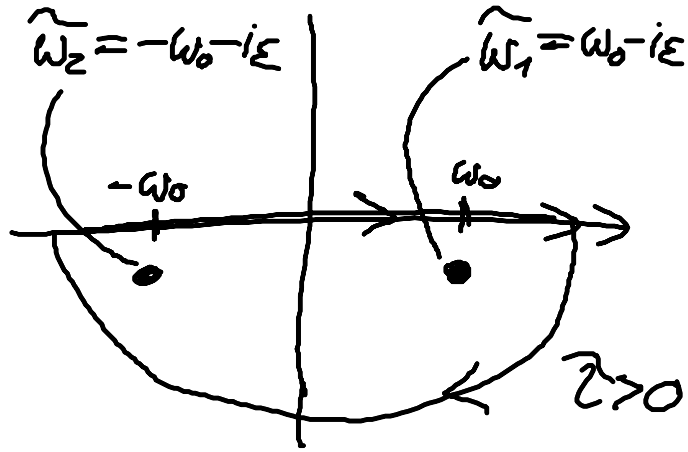
Für $\hat{\tau} > 0$ bzw $\hat{\tau} < 0$ muß man die Kurve b) bzw a) nehmen

Zu 2) Gewährleistung, dass (Kausalität!) das ganze Integral für $\hat{\tau} < 0$ verschwindet!

$\Longrightarrow$ Verschiebung der Pole! (Grund später)



Kurve für den Fall $\hat{\tau} < 0$



Also zu betrachten:

$$\boxed{\Gamma(\underline{k}, \hat{\tau}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \oint d\hat{\omega} \, \frac{e^{-i\hat{\omega}\hat{\tau}}}{\frac{1}{c^2}(-1)(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega})(\hat{\omega}_2 - \hat{\omega})}}$$

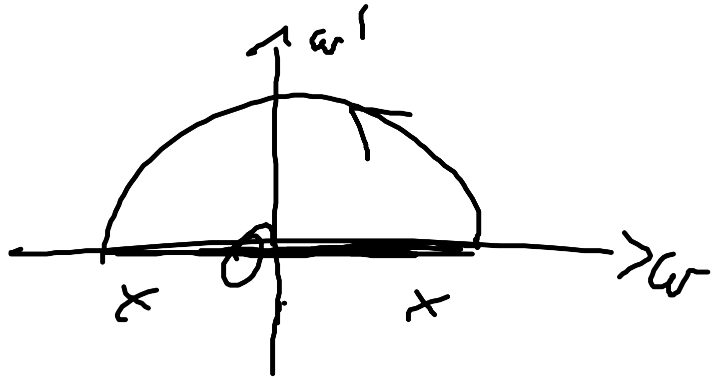
denn

$(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega})(\hat{\omega}_2 - \hat{\omega})$

$$= -\omega_0^2 + \omega^2 + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

~~bis~~

$\tau < 0$:



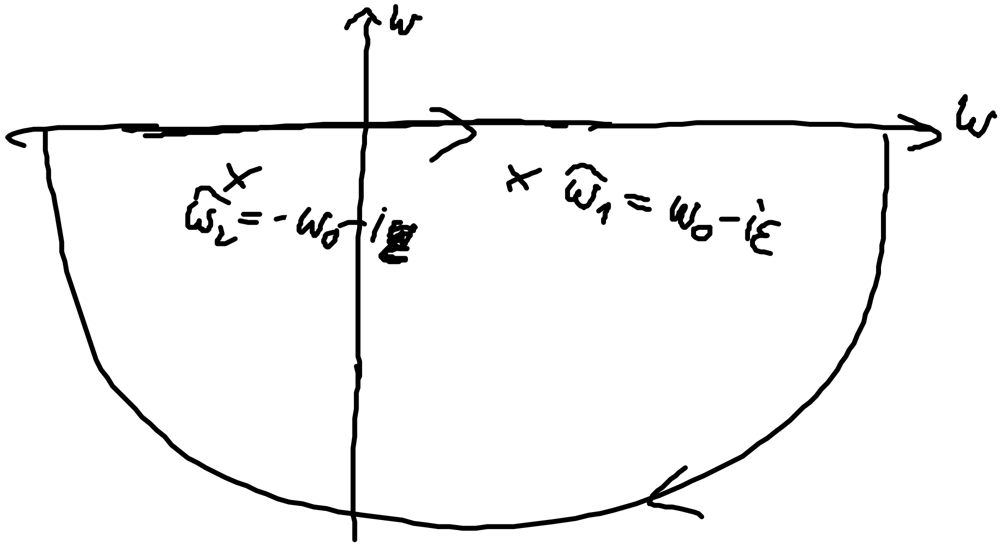
Kurve enthält keine Pole, d.h. $f(\hat{\omega})$ ist überall analytisch in dem von Kurve umschlossenen Gebiet!

Dann gilt Cauchy'scher Integralsatz:

$$\oint d\hat{\omega}\, f(\hat{\omega}) = 0 \qquad !$$

$\Rightarrow \Gamma(\underline{k}, \tau < 0) = 0$ wie gefordert $\rightarrow$ Kausalität

$\hat{\tau} > 0$:



Im Kurvengebiet ist der Integrand analytisch bis auf die beiden Pole 1. Ordnung

⊂ denn Nenner: $\frac{1}{c^2}(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega})(\hat{\omega}_2 - \hat{\omega})(-1)$

⇒ Anwendung des sogenannten <u>Residuensatzes</u>

$$\frac{1}{2\pi i} \oint f(\hat{\omega})\, d\hat{\omega} = \sum_{\alpha=1}^{n} \underbrace{\mathrm{Res}_{\hat{\omega}_\alpha}}_{\text{Residuum}}$$

Summe über die Polstellen

Dabei ist das Residuums eines Pols erster Ordnung gegeben durch:

$$\mathrm{Res}_{\hat{\omega}_\alpha} = \lim_{\hat{\omega} \to \hat{\omega}_\alpha} \left[(\hat{\omega} - \hat{\omega}_\alpha) f(\hat{\omega}) \right]$$

Dabei muß die Kurve im mathematisch positiven Sinne durchlaufen werden: $\circlearrowleft$

Betrachte die Residuen:

$$\mathrm{Res}_{\hat{\omega}_1} = \lim_{\hat{\omega} \to \hat{\omega}_1} \left[\cancel{(\hat{\omega} - \hat{\omega}_1)} \frac{e^{-i\hat{\omega}\hat{\tau}}}{\frac{(-1)}{c^2} \underbrace{\cancel{(\hat{\omega}_1 - \hat{\omega})}}_{(-1)} (\hat{\omega}_2 - \hat{\omega})} \right]$$

$$= \lim_{\hat{\omega} \to \hat{\omega}_1} \left[\frac{e^{-i\hat{\omega}\hat{\tau}}}{\frac{1}{c^2} (\hat{\omega}_2 - \hat{\omega})} \right]$$

$$= \frac{e^{-i\hat{\omega}_1\hat{\tau}}}{\frac{1}{c^2} (\hat{\omega}_2 - \hat{\omega}_1)}$$

analog: $\mathrm{Res}_{\hat{\omega}_2} = \dfrac{e^{-i\hat{\omega}_2\hat{\tau}}}{\frac{1}{c^2} (\hat{\omega}_1 - \hat{\omega}_2)}$

Damit

$$\Gamma(\underline{k},\hat{\tau})\Big|_{\hat{\tau}>0} = \lim_{\varepsilon\to 0} \oint d\hat{\omega}\, \frac{e^{-i\hat{\omega}\hat{\tau}}}{\frac{(-1)}{c^2}(\hat{\omega}_1-\hat{\omega})(\hat{\omega}_2-\hat{\omega})}$$

Residuensatz

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{\hat{\omega}_1} + \mathrm{Res}_{\hat{\omega}_2}\right)(-1)$$

(-1) wegen umgekehrter Kurvenführung!

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0} 2\pi i \left(\frac{e^{-i\hat{\omega}_1\hat{\tau}}}{\frac{1}{c^2}(\hat{\omega}_2-\hat{\omega}_1)} + \frac{e^{-i\hat{\omega}_2\hat{\tau}}}{\frac{1}{c^2}(\hat{\omega}_1-\hat{\omega}_2)}\right)$$

benutze: $\hat{\omega}_1 = \omega_0 - i\varepsilon$, $\hat{\omega}_2 = -\omega_0 - i\varepsilon$

$$\Rightarrow \Gamma(\underline{k},\hat{\tau}>0)$$

$$= -2\pi i \left(\frac{e^{-i\omega_0\hat{\tau}}}{\frac{1}{c^2}(-2\omega_0)} + \frac{e^{i\omega_0\hat{\tau}}}{\frac{1}{c^2}(+2\omega_0)}\right)$$

$$= -2\pi i c^2 \left(\frac{e^{i\omega_0\hat{\tau}}}{2\omega_0} - \frac{e^{-i\omega_0\hat{\tau}}}{2\omega_0}\right)$$

$$\boxed{\Gamma(\underline{k}, \tau > 0) = 2\pi c^2 \frac{\sin \omega_0 \tau}{\omega_0}}$$ mit $\omega_0 = ck$

Zurück zur Green'schen Funktion:

$$G(\underline{s}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\underline{k}\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{s}}\, \Gamma(\underline{k}, \tau)$$

$$= \frac{c}{(2\pi)^3} \int d\underline{k}\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{s}} \frac{\sin(ck\tau)}{k}$$

$\underline{s} = \underline{r} - \underline{r}'$

$\tau = t - t'$

Auswerten in Polarkoordinaten!

$\rightarrow$ Übung

Endergebnis:

$$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \frac{1}{4\pi |\underline{r}-\underline{r}'|} \delta\Big(t-t'-\underbrace{\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}}_{\text{Retardierung}}\Big)$$

Retardierte Greensche Funktion