Wh:

$$\Box u(\underline{r},t) = -f(\underline{r},t)$$

$$u(\underline{r},t) = \int d\underline{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') f(\underline{r}', t')$$

Kausalität: $\boxed{G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = 0}$ für $t < t'$

$t-t'$

$$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\underline{k}\, e^{i\underline{k}(\underline{r}-\underline{r}')} \Gamma(\underline{k}, \tau)$$

Komplexe Integration

Endergebnis

$$\boxed{G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\, \delta\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}$$

retardierte Green'sche Funktion!

$t > t'$

Zusammenstellung der Eigenschaften

- $\underbrace{\Box G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')}_{\text{Zugehöriges Potential}} = -\underbrace{\delta(\underline{r}-\underline{r}')\,\delta(t-t')}_{\text{Ladungsdichte einer Punktladung, die zur Zeit } t=t' \text{ am Ort } \underline{r}=\underline{r}' \text{ existiert!}}$

Ladungsdichte einer Punktladung, die zur Zeit $t=t'$ am Ort $\underline{r}=\underline{r}'$ existiert!

Zugehöriges Potential

— analog zur Elektrostatik, nur hier mit Zeitabhängigkeit!

- G ist kausal!
- G ist "radial", d.h. $G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = G(|\underline{r}-\underline{r}'|, t-t')$

- Interpretation der Zeitabhängigkeit:

$$G \sim \delta\left(t - t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)$$

Das durch die Punktladung erzeugte Potential erreicht einen Ort $\underline{r} \neq \underline{r}'$ erst nach der Zeit $\Delta t = t - t' = \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$

man sagt: Die "Störung" breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit c in die Zukunft aus!

Einsetzen von G in die inhomogenen Wellengleichungen:

$$u(\underline{r},t) = \int d\underline{r}' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') \, f(\underline{r}',t')$$

$$= \int d\underline{r}' \frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \delta\!\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) f(\underline{r}',t')$$

$$= \int d\underline{r}' \frac{f\!\left(\underline{r}', t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \Phi(\underline{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\underline{r}' \frac{\rho\!\left(\underline{r}', t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \\ \underline{A}(\underline{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\underline{r}' \frac{\underline{j}\!\left(\underline{r}', t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \end{aligned}}$$ retardierte Potentiale

Die Potentiale Φ und $\underline{A}$ am Ort $\underline{r}$ zur Zeit t ergeben sich aus den Ladungen und Strömen, die an den Orten $\underline{r}'$ zu der früheren Zeit $t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$ erzeugt wurden!

Bemerkungen

- Für gegebenes Φ und $\underline{A}$ folgen die Felder dann aus $\underline{E} = -\nabla\Phi - \dot{\underline{A}}$, $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$
  $\Rightarrow$ hier taucht ebenfalls die Retardierung auf!
- Genau wie in der Statik sind die Integrale für Φ und $\underline{A}$ i.a. schwer zu lösen $\Rightarrow$ Näherungen / Multipolentwicklung!
- Die angegebene Green'sche Funktion und die daraus folgende Potentiale gelten für Systeme ohne Ränder

In Anwesenheit von Randbedingungen (z.B. leitenden Oberfläche) verwendet man dieselben Tricks wie in der Elektrostatik!

$$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\delta\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) + F(\underline{r}-\underline{r}', t-t')$$

mit $\Box F(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = 0$

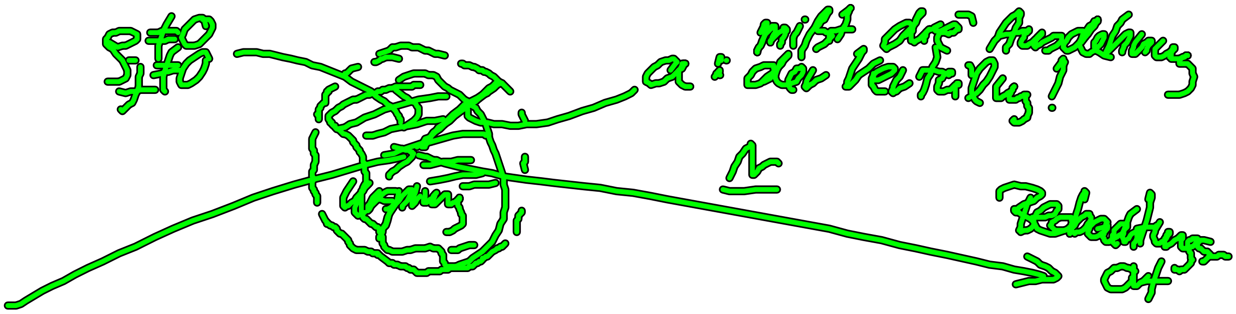
F ist Lösung der homogenen Wellengleichung!

J wird so angepaßt, dass Randbed. erfüllt!

V.5.2 Multipolstrahlung

Ziel: Entwicklung des retardierten Potentials für räumlich lokalisierte, aber zeitabhängige Ladungs- und Stromverteilungen!

Annahmen:



Im schraffierten Gebiet sei ein zeitabhängiger Strom vorhanden

$$\underline{j}(\underline{r}',t') = \underline{j}_0(\underline{r}')\,e^{i\omega t'}$$

Oszillation!

Vorgehensweise:

Verwende wieder Lorentzeichung, d.h.

$$\nabla\cdot\underline{A}(\underline{r},t)+\frac{1}{c^2}\dot{\Phi}(\underline{r},t)=0$$

⟹ Es reicht aus, das Vektorpotential zu betrachten, denn daraus folgt ϕ!

⟹ Ausgangspunkt:

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\underline{r}'\,\frac{\underline{j}\left(\underline{r}',t-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Beiträge weit weg von der Verteilung?

führe ein: $t_{ret} = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$

1. Näherung

betrachte Orte $\underline{r}$ mit $r \gg r'$

$$r/r' \gg 1$$

$$\Leftrightarrow\ r/a \gg 1$$

$$(a = \max(r'))$$

Beträge der Vektoren $\underline{r}'$ für die $\underline{j} \neq 0$!

$$\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^3}(\underline{r}\cdot\underline{r}') + \dots$$

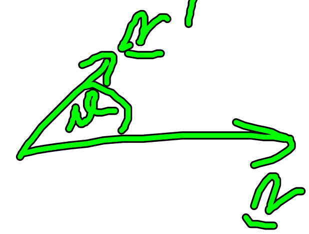
$\Rightarrow$ Integrand beim Vektorpotential:

$$\frac{\underline{j}(\underline{r}', t_{ret})}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \approx \frac{1}{r}\underline{j}(\underline{r}', t_{ret}) + \frac{1}{r^3}(\underline{r}\cdot\underline{r}')\,\underline{j}(\underline{r}', t_{ret})$$

2. Näherung (im Zeitargument)

$$t_{ret} = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$$

$$= t - \frac{1}{c}\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta}$$



$$= t - \frac{1}{c}\,r\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\vartheta}$$

$$\approx t - \frac{r}{c}\left(1 - \cos\vartheta\left(\frac{r'}{r}\right) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right)\right)$$

$$= \underbrace{t - \frac{r}{c}}_{\tilde{t}} - \frac{1}{c}\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r} + \text{Terme höherer Ordnung!}$$

$$t_{ret} = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$$

$$\approx \tilde{t} + \frac{1}{c}\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r}$$

Konsequenz für den Strom

$$\underline{j}(\underline{r}', t_{ret}) \simeq \underline{j}(\underline{r}', \tilde{t} + \Delta t)$$

mit

$$\Delta t = \frac{1}{c}\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r}$$

Annahme: Δt klein!

$$\simeq \underline{j}(\underline{r}', \tilde{t}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \underline{j}(\underline{r}', \tilde{t})\Big|_{\tilde{t}=0} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)$$

$$\Rightarrow \underline{j}(\underline{r}', t_{ret}) = \underline{j}(\underline{r}', \tilde{t}) + \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r\cdot c}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \underline{j}(\underline{r}', \tilde{t})\Big|_{\tilde{t}=0}$$

Kombiniere nun beide Näherungen

$$\underbrace{\frac{\underline{j}(\underline{r}', t_{ret})}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\text{voller Integrand in } \underline{A}} \overset{1.}{\simeq} \frac{1}{r}\underline{j}(\underline{r}', t_{ret}) + \frac{1}{r^3}(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}(\underline{r}', t_{ret})$$

$$\overset{2.}{\simeq} \frac{1}{r}\underline{j}(\underline{r}', \tilde{t}) + \frac{1}{r}\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r\cdot c}\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\underline{j}(\underline{r}', \tilde{t})\Big|_{\tilde{t}=0}$$

$$+ \frac{1}{r^3}(\underline{r}\cdot\underline{r}')\underline{j}(\underline{r}', \tilde{t})$$

$$\cancel{+ \frac{1}{r^3}(\underline{r}\cdot\underline{r}')\left(\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r\cdot c}\right)\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\underline{j}(\underline{r}', \tilde{t})\Big|_{\tilde{t}=0}}$$

Der letzte Term wird vernachlässigt, da er bereits höhere Ordnung in $\frac{r'}{r}$ ist!

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\underline{r}' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}', t_{ret})}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$\approx \underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) + \underline{A}^{(2)}(\underline{r},t)$$

mit $\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d\underline{r}' \, \underline{j}(\underline{r}', \hat{t})$

$$\underline{A}^{(2)}(\underline{r},t) = \frac{1}{r^3} \int d\underline{r}' \, (\underline{r}\cdot\underline{r}') \left(1 + \frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \underline{j}(\underline{r}', \hat{t})$$

nochmal zu den Näherungen:

- $\boxed{\begin{aligned} r &\gg r' \\ \frac{r}{a} &\gg 1 \end{aligned}}$ (a Ausdehnung der Quelle)

- $\hat{t} = t - \frac{r}{c} \gg \Delta t = \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{rc}$

betrachte $\max\left(\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{\underbrace{rc}_{\Delta t}}\right) = \max\left(\frac{r'\cos\vartheta}{c}\right)$

$$= \max\left(\frac{r'}{c}\right) = \frac{a}{c}$$

$$\boxed{\hat{t} \gg \frac{a}{c}}$$

$\hat{t}$ ≙ Retardierung durch Quelle direkt im Ursprung!

$$\gg \underbrace{\frac{a}{c}}$$

relative Retardierung dadurch, daß die Quelle ausgedehnt ist

Zur weiteren Illustration der Näherung in t̂ erst betrachte harmonischen Strom:

$$\underline{j}(\underline{r}', t) = \underline{j}_0(\underline{r}')\, e^{i\omega t}$$

$$\rightarrow \; j(\mathbf{r}', t_{ret}) = j_0(\mathbf{r}')\, e^{i\omega t - i\omega(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/c}$$

setze $t_{ret} = \underbrace{\tilde{t}}_{t-\frac{r}{c}} + \underbrace{\Delta t}_{\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{rc}}$

$$\approx j_0(\mathbf{r}')\, e^{i\omega t - i\omega \frac{r}{c} + i\frac{\omega}{c}\left(\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}\right)}$$

Betrachtungsweise: Diese Näherung gerechtfertigt, falls

$$e^{i\omega \underbrace{\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{rc}}_{\Delta t}} \ll 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k}\,\underbrace{\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r}}_{a} \ll 2\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad a \ll \frac{2\pi}{k} = \lambda$$

$$\boxed{\lambda \gg a}$$

Wellenlänge der Strahlung muß viel größer sein als die Ausdehnung der Quelle!

V.5.3. Elektrische Dipol-Strahlung, Hertz'scher Dipol

Betrachte (nur) den ersten Term in der Multipolentwicklung von $\underline{A}(\underline{r},t)$

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d\underline{r}'\, \underline{j}(\underline{r}',\tilde{t})$$

mit $\tilde{t} = t - \frac{r}{c}$

Bemerk:
In der Magnetostatik war dieser Term Null!

benutze:

$$\underbrace{\nabla_{\underline{r}'}\cdot}_{\text{Divergenz}}\left(x_k' \underline{j}(\underline{r}',\tilde{t})\right)$$

$$= x_k' \nabla_{\underline{r}'}\underline{j} + \underbrace{(\nabla_{\underline{r}'} x_k')}_{\text{Einheitsvektor}}\cdot\underline{j}$$

Komponente von $\underline{r}'$

$$= -x_k' \dot{\rho}(\underline{r}', t) + j_k(\underline{r}', t)$$

Kontinuitätsgleichung: $\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r}, t)}_{\dot{\rho}} + \nabla \cdot \underline{j} = 0$

$$\int d\underline{r}' \, \nabla_{\underline{r}'} \left(x_k' \underline{j}(\underline{r}', t) \right)$$

$$\overset{\text{Gauss}}{=} \int d\underline{F}' \left(x_k' \underline{j}(\underline{r}', t) \right)$$

$= 0$ da der Strom im Unendlichen verschwindet

$$= \int d\underline{r}' \left(-x_k' \dot{\rho}(\underline{r}', t) + j_k(\underline{r}', t) \right)$$

$$\int d\underline{r}' \, j_k(\underline{r}', \tilde{t}) = \int d\underline{r}' \, x_k' \dot{\rho}(\underline{r}', \tilde{t})$$

Damit:

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d\underline{r}' \, \underline{j}(\underline{r}', \tilde{t})$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \int d\underline{r}' \, \underline{r}' \dot{\rho}(\underline{r}', \tilde{t})$$

benutze

$$\underline{p}(t) = \int d\underline{r}' \, \underline{r}' \rho(\underline{r}', t)$$

elektrisches Dipolmoment (analog zu Elektrostatik!)

$$\Rightarrow \dot{\underline{p}} = \int d\underline{r}' \, \underline{r}' \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \rho(\underline{r}', t)}_{\dot{\rho}}$$

$$\rightarrow \underline{A}^{(1)}(\underline{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{\underline{p}}(\overbrace{t - \frac{r}{c}}^{\tilde{t}})$$

Daher der Name „elektrische Dipolstrahlung"!