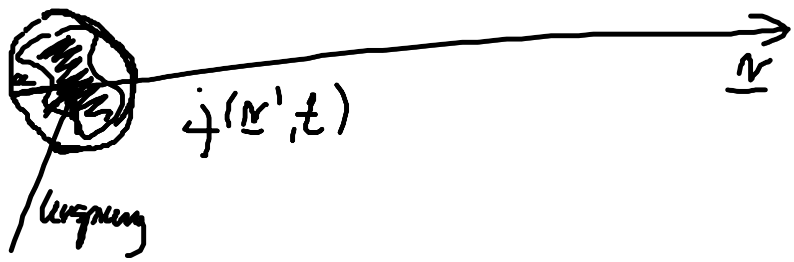
Wh.:



Potentiale, Felder für $r \gg a$?

Retardierung

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\underline{r}' \, \frac{\underline{j}\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

Lorentz-Eichung: $\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r},t) + \frac{1}{c^2}\dot{\phi} = 0$

retardierte Zeit

$$t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \approx \underbrace{\tilde{t}}_{t-\frac{r}{c}} + \frac{1}{c}\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r} + \text{Terme höherer Ordnung}$$

$\Rightarrow$ niedrigster Term:

$$A^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d\underline{r}' \, \underline{j}(\underline{r}',\tilde{t})$$

Wir haben also 2 Näherungen:

- $r \gg a$
- $\tilde{t} = t - \frac{r}{c} \gg \underbrace{\frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{rc}}$

das Maximum davon ist $\underline{a}$

c

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\hat{t}}_{\text{Retardierung durch Quelle im Ursprung}} \gg \underbrace{\frac{a}{c}}_{\text{relative Retardierung dadurch, daß Quelle ausgedehnt ist}}$$

betrachte konkret harmonischen Strom

$$j(\underline{r}', t) = j_0(\underline{r}')\, e^{i\omega t}$$

$$j\left(\underline{r}', t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) = j_0(\underline{r}') \exp\left(i\omega t - i\omega \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)$$

$$\approx j_0(\underline{r}')\, e^{i\omega t - i\omega \frac{r}{c} + \frac{i\omega}{c} \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r}}$$

Wann ist die Ausdehnung der Quelle vernachlässigbar?

$$e^{i \frac{\omega}{c} \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r}} \approx 1$$

$$\frac{\omega}{c} \frac{\underline{r}\cdot\underline{r}'}{r} \approx \underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k} a \ll 1 \Longleftrightarrow ka \ll 1$$

$$\Longleftrightarrow a \ll k^{-1} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

$\Longrightarrow$ Wir nehmen also an, daß

$$\lambda \gg a$$

Wellenlänge der harmonischen Störung

Ausdehnung der Quelle

$$\underline{A}^{(1)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int d\underline{r}'\, \underline{j}(\underline{r}',\underbrace{\tilde{t}}_{t-\frac{r}{c}})$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\,\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

mit $\dot{\underline{p}} = \frac{\partial}{\partial t}\underline{p}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\overbrace{\int d\underline{r}'\, \underline{r}'\rho(\underline{r}',t)}^{\text{elektr. Dipolmoment}}$

In niedrigster Ordnung (vom Vektorpotential) haben wir also „Dipolstrahlung"

Spezialfall:

Hertz'scher Dipol

Ansatz: $\underline{p}(t) = \underline{p}_0\, e^{-i\omega t}$ harmonisch schwingender Dipol

$$\Rightarrow \underline{A}(\underline{r},t) \left(\approx \underline{A}^{(1)}(\underline{r},t)\right)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \underline{p}_0 \frac{1}{r} e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

$k=\frac{\omega}{c}$

$$\Rightarrow \underline{A}(\underline{r},t) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \underline{p}_0 \underbrace{\frac{1}{r} e^{ikr-i\omega t}}$$

Kugelwelle!

Betrag nimmt ab mit $\frac{1}{r}$

Entsprechendes Skalares Potential

$\boxed{\mu_0 c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}}$

aus der Lorentz-Eichung: $\nabla \cdot \underline{A}(\underline{r},t) + \frac{1}{c^2}\dot{\phi}(\underline{r},t) = 0$

$$\Rightarrow -\dot{\phi}(\underline{r},t) = c^2\, \nabla\cdot\underline{A} = c^2\, \nabla\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right) \quad \text{Produktregel}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}\nabla\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

Integrieren über die Zeit:

$$\Phi(\underline{r},t) = \underbrace{\Phi^{stat}(\underline{r})}_{\text{setzt man Null}}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\underbrace{\nabla\left(\frac{1}{r}\right)}_{-\frac{\underline{r}}{r^3}} \underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}\nabla \underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)(-1)$$

$$\Phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\underbrace{\frac{1}{r^3}\underline{r}\cdot\underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}_{\sim\frac{1}{r^2}} + \underbrace{\frac{1}{rc}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\overbrace{\frac{\underline{r}}{r}}^{\nabla r}}_{\sim\frac{1}{r}}\right)$$

daraus die Felder:

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \nabla\times\underline{A}(\underline{r},t)$$

$$\underline{E}(\underline{r},t) = -\nabla\Phi(\underline{r},t) - \dot{\underline{A}}(\underline{r},t)$$

Magnetfeld:

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\nabla\times(\underline{a}\,\varphi)\\ &= \varphi\,\nabla\times\underline{a}\\ &\quad -\underline{a}\times\nabla\varphi\end{aligned}}$$

$\vdots$

$$= \underbrace{-\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{1}{r} \left(\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \times \frac{\underline{r}}{r}\right)}_{\sim \frac{1}{r}}$$

$$\underbrace{+\frac{\mu_0}{4\pi} \left(\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \times \frac{\underline{r}}{r^3}\right)}_{\sim 1/r^2}$$

- $\underline{B}$ enthält also Terme mit unterschiedlicher Abstandsabhängigkeit!

- $\underline{B}$ steht immer senkrecht auf $\underline{r}$!

Berechnung vom $\underline{E}$-Feld

$$\left.\begin{aligned}\underline{E}(\underline{r},t) = &-\nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\, \underline{r}\cdot\underline{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\\ &-\nabla\left(\frac{1}{r^2 c}\, \underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)\end{aligned}\right\} \text{aus } -\nabla\phi$$

$$-\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \quad \leftarrow \text{aus } \dot{\underline{A}}$$

man sieht: Die Ausdrücke werden

sehr komplex

— obwohl wir "nur" Multipolstrahlung in niedrigster Näherung betrachten!

(also Dipolstrahlung)

$\Rightarrow$ Man diskutiert typischerweise nur Grenzfälle

Erinnerung: Voraussetzung für Multipolentwicklung im dyn. Fall:

- $a \ll r$
- $\frac{a}{c} \ll t - \frac{r}{c} \xrightarrow[\text{harmonische Störung}]{} a \ll \lambda$, $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}$

$\Rightarrow$ Diskutiere 2 Fälle

i) $a \ll r \ll \lambda$

„Nahzone"

ii) $a \ll \lambda \ll r$

„Fernzone"

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}}$$

Zunächst zur Nahzone:

$$r \ll \lambda \iff kr \ll 2\pi$$
$$\iff kr \ll 1$$

Folgerung: $p\left(t-\frac{r}{c}\right) = p_0 e^{i\omega t} \underbrace{e^{-ikr}}_{\approx 1} \approx p_0 e^{i\omega t} = p(t)$

In der Nahzone sind die Retardierungseffekte also klein und werden daher vernachlässigt!

$\longrightarrow$ "quasistatische Näherung"!

Potentiale in der Nahzone:

$$\underline{A}^{(N)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\dot{p}(t)$$

$$\phi^{(N)}(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}\underline{r}\cdot p(t)\right)$$

Unterdrücke also den 2. Term in ϕ, da dieser alleine von der Retardierung kommt!

Felder:

$$\underline{B}^{(N)}(\underline{r},t) = \nabla \times \underline{A}^{(N)}(\underline{r},t)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \underbrace{\left(\dot{\underline{p}}(t) \times \frac{\underline{r}}{r^3}\right)}_{\sim 1/r^2}$$

und $\underline{B} \perp \underline{r}$!

$$\underline{E}^{(N)}(\underline{r},t) = -\nabla \Phi^{(N)} - \dot{\underline{A}}^{(N)}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\underline{r}(\underline{r}\cdot\underline{p}(t))}{r^5} - \frac{\underline{p}(t)}{r^3}\right) - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\ddot{\underline{p}}(t)$$

- 1. Term:

  Instantanes Dipolfeld

- 2. Term: ist vernachlässigbar gegenüber dem 1. Term

Grund:

$$\frac{\ddot{p}}{r} \sim \frac{\omega^2}{r} \sim \frac{k^2}{r} \ll \frac{1}{r^3} \;!$$

$(\omega = ck)$

$kr \ll 1$

$k \ll \frac{1}{r}$

Das elektrische Nahfeld eines Hertz'schen Dipols entspricht einem instantanen Dipolfeld!

2. Grenzfall

$$a \ll \lambda \ll r$$

"Fernzone" oder auch "Strahlungszone"

<u>Folgerung:</u>

betrachte:
$$\frac{1}{c}\dot{p}\left(t-\frac{r}{c}\right) = -\frac{i\omega}{c}\, p\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

$$p\left(t-\frac{r}{c}\right) = p_0\, e^{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

jetzt: $r \gg \frac{2\pi}{k} \Leftrightarrow kr \gg 2\pi$

$\Leftrightarrow \frac{\omega}{c} r \gg 2\pi \Leftrightarrow \frac{\omega}{c} \gg \frac{2\pi}{r}$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{c} p\left(t-\frac{r}{c}\right) \gg \frac{1}{r} p\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

$\Rightarrow$ Potentiale:

$$\underline{A}^{(F)}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

wie gehabt!

$$\phi^{(F)}(\underline{r},t) \approx \frac{1}{r^2 c}\,\underline{r}\cdot\dot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

(d.h. 1. Term in ϕ ~~...~~ im ursprüngl. Ausdruck fällt weg!)

Felder:

$$\underline{B}^{(F)}(\underline{r},t) \approx -\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{1}{r^2}\left(\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\underline{r}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

$$\underline{E}^{(F)}(\underline{r},t) = -\nabla\phi^{(F)}(\underline{r},t) - \dot{\underline{A}}^{(F)}(\underline{r},t)$$

$$\approx \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^2}\left(\underline{r}\times\ddot{\underline{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\times\frac{\underline{r}}{r}}_{\sim\frac{1}{r}}$$

+ Terme höherer Ordnung in $\frac{1}{r}$!

In dieser Näherung gilt:

$$\underline{E}^{(F)}(\underline{r},t) = c\, \underline{B}^{(F)}(\underline{r},t) \times \frac{\underline{r}}{r}$$

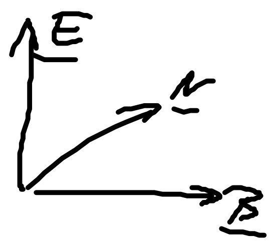
→ Zusammenfassung der Eigenschaften der Fernfelder

- $\underline{E}^{(F)} \sim \frac{1}{r}$, $\underline{B}^{(F)} \sim \frac{1}{r}$

- $\underline{E}^{(F)} \perp \underline{r}$, $\underline{B}^{(F)} \perp \underline{r}$

- $\underline{B}^{(F)} \times \frac{\underline{r}}{r} = \frac{1}{c} \underline{E}^{(F)}$

→ $\underline{B}$, $\underline{r}$ und $\underline{E}$ bilden lokal ein Rechtssystem



Betrachte dazugehörigen Poyntingvektor

Energiestromdichte

$$\underline{S}(\underline{r},t) = \underline{E}(\underline{r},t) \times \underbrace{\underline{H}(\underline{r},t)}_{\frac{1}{\mu_0}\underline{B}(\underline{r},t)}$$