freie "Ladungen":

Materie 2,

Ladungen, die sich durch äußere Felder bewegen lassen!

(bewegliche Ladungsträger: e^- in Metallen
Ionen in Elektrolyte

Wir hatten (Kap VI. 1: Polarisation und dielektr. Verschiebung)
betrachtet Isolatoren (Material ohne freie Ladungsträger)

a) mikroskop. permanente Dipole

z.B. H_2O-Molekül

permanente Asymmetrie zweier Ladungen

orientierbar in äußeren elektrischen Feldern:

Potentielle Energie

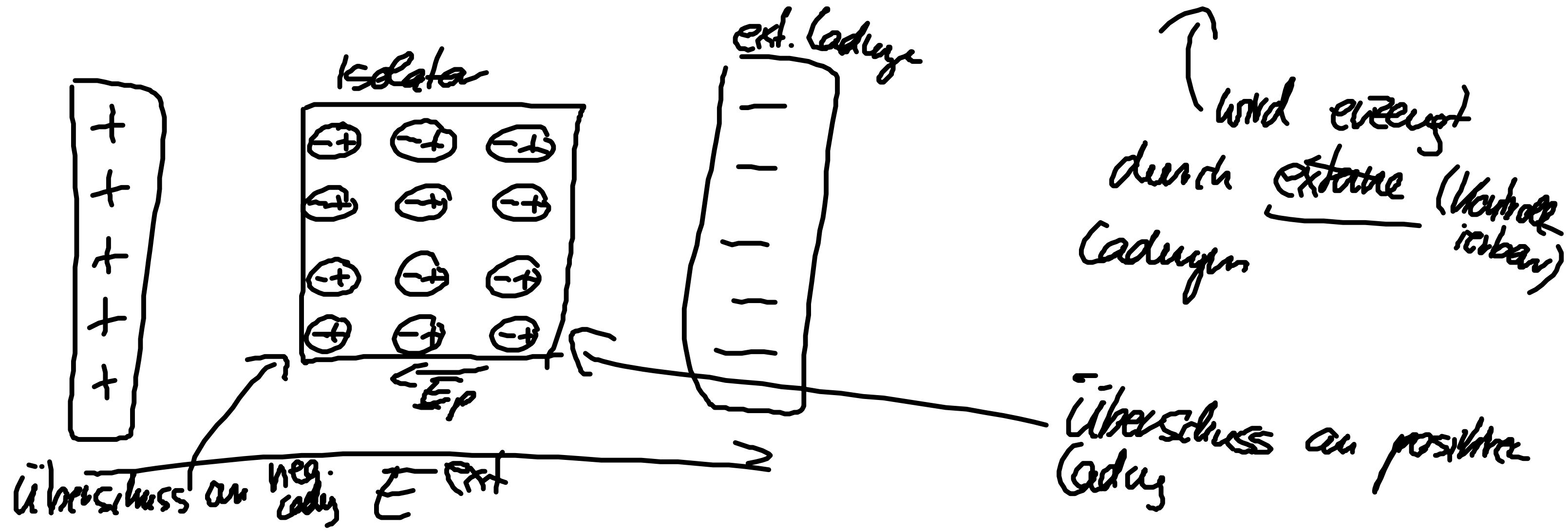
$$W = -\underline{p} \cdot \underline{E}^{ext}$$

temperaturabhängiger Effekt!

b) Polarisierbarkeit von Teilchen (Moleküle, Nanopartikel), die kein permanentes Dipolmoment haben, aber in denen man ein Dipolmoment induzieren kann

Bemerk: In diesem Falle der induzierten Dipole gilt immer $\underline{p} \parallel \underline{E}^{ext}$!!

Betrachte nun makroskop. Volumen eines Isolators ~~im~~ in einem externen elektr. Feld $\underline{E}^{ext}$



⇒ Die Überschussladungen an den Grenzflächen führen zu einem Zusatzfeld $\underline{E}_p$

sogenannte Polarisationsladungen

⇒ Das Gesamtfeld im Innern des Isolators ist gegeben durch

„Polarisationsfeld“

$$\underline{E} = \underline{E}^{ext} + \underline{E}_p$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\underline{E} = \nabla\cdot\underline{E}^{ext} + \nabla\cdot\underline{E}_p$$

Kombiniere dies mit unserer früheren Gleichung $\nabla\cdot\underline{E}^{ext} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho^{ext}$

und dem Ansatz

$$\nabla\cdot\underline{E}_p = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_p \qquad ①$$

Polarisationsladungsdichte

d.h. $\rho_p = \rho_p(\underline{r},t)$ ist die Quelle des Zusatzfeldes $\underline{E}_p(\underline{r},t)$

$$\Longrightarrow \quad \nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho^{ext} + \rho_p\right) \quad \textcircled{2}$$

Definiere nun die sogenannte Polarisation

$$\underline{P}(\underline{r},t) := -\varepsilon_0 \underline{E}_p(\underline{r},t)$$

$$\underset{\text{mit } \textcircled{1}}{\Longrightarrow} \quad \nabla \cdot P(\underline{r},t) = -\rho_p(\underline{r},t) \quad \textcircled{3}$$

Kombiniere ①, ②, und ③

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon_0 \underline{E}) = \rho^{ext} + \rho_p$$

$$\underset{\textcircled{1}}{=} \rho^{ext} + \nabla \cdot (\varepsilon_0 \underline{E}_p) = \rho^{ext} - \nabla \cdot \underline{P}$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}) = \rho^{ext}$$

Definiere nun die dielektrische Verschiebung in Materie:

$$\underline{D}(\underline{r},t) = \varepsilon_0 \, \underline{E}(\underline{r},t) + \underbrace{\underline{P}(\underline{r},t)}_{\text{Polarisationsbeitrag}}$$

— existiert nur in Materie!

$$\Rightarrow \boxed{\nabla \cdot D(\underline{r},t) = \rho^{ext}(\underline{r},t)}$$

freie, extern kontrollierbare Ladungen!

In dieser Maxwell-Gl. tauchen also explizit nur die freien Ladungen auf, nicht aber die Polarisationsladungen („gebunden")

— diese sind bereits in $\underline{P}(\underline{r},t)$ enthalten!

Bemerkungen

i) aus $\nabla \cdot \underline{P} = -\rho_p$ folgt für ein Volumen V mit Oberfläche F_V:

$$\oint_{F_V} \underline{P} \cdot d\underline{F} = \int_V dV \, \nabla \cdot \underline{P} = -\int dV \, \rho_p$$

⇒ Möglichkeit, die Ladungsdichte an den
lokale
Grenzflächen zu bestimmen, falls die Polarisation bekannt ist!

⟹ daraus wieder das Feld $\underline{E}_p$

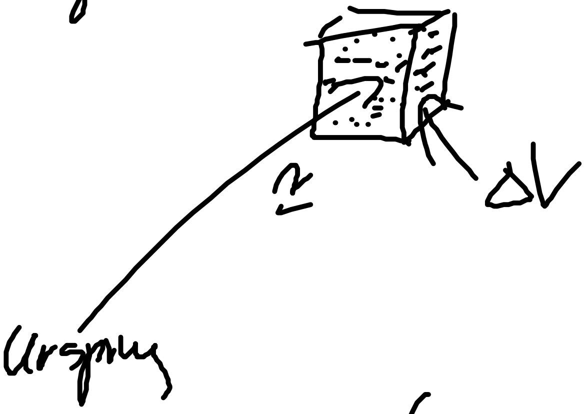
ii) In Materie haben die Größen $\rho(\underline{r},t)$, $\underline{P}(\underline{r},t)$ etc. „nur" gemittelten Charakter!

Grund: „mikroskopische" Betrachtung wäre gar nicht möglich aufgrund der Vielzahl von Teilchen!
(Größenordnung 10^{23} pro cm^3)

→ Mittelung über kleines, aber makroskopisches Volumen ΔV

z.B. $$\rho(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d\underline{s}\; \underbrace{\rho_{mikro}(\underline{r}+\underline{s},t)}_{\sum_{i \text{ in } \Delta V} q_i\, \delta(\underline{r}+\underline{s}-\underline{r}_i(t))}$$

makroskop.
Ladungsdichte



analog: $$\underline{P}(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d\underline{s}\; \underbrace{\underline{P}_{mikro}(\underline{r}+\underline{s},t)}_{\sum_i \underline{p}_i(t)\, \delta(\underline{r}+\underline{s}-\underline{r}_i(t))}$$

mikroskop.
Dipole
(permanent o.
induziert)

Beachte:

Durch die räumliche Mittelung werden auch rasche zeitlichen Fluktuationen (durch Wärmebewegung) „geglättet“

$\Longrightarrow$ Die räuml. Mittelung impliziert auch eine zeitl. Mittelung

(iii) Makroskopisches skalares Potential (Lorentzeichung)

$$\Phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V d\underline{r}' \, \frac{\rho(\underline{r}', t_{ret})}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \quad , \; t_{ret} = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$$

$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d\underline{r}' \, \frac{\rho_P(\underline{r}', t_{ret})}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

IV.2. Magnetisierung und Magnetfeld in Materie

früher hatten wir nur eine Art von Stromdichte (die, die durch freie, sich bewegende Ladungen hervorgerufen wird!)

$$\underline{j}(\underline{r},t) = \rho(\underline{r},t)\,\underline{v}$$

in Materie gibt es noch mehr Arten von Strömen

$$\underline{j}^{total}(\underline{r},t) = \underbrace{\underline{j}(\underline{r},t)}_{\text{„freier Strom"}} + \underline{j}_{mag}(\underline{r},t) + \underline{j}_P(\underline{r},t)$$

„Magnetisierungsstrom" „Polarisationsstrom"

entsprechend das Vektorpotential (Lorentzeichung)

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V d\underline{r}' \left(\underline{j}(\underline{r}', t_{ret}) + \underline{j}_{mag}(\underline{r}', t_{ret}) + \underline{j}_p(\underline{r}', t_{ret}) \right) \cdot \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\text{mit } t_{ret} = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$$

Zum Polarisationsstrom

— erzeugt durch eine zeitlich veränderliche Polarisation (siehe Kap VI.1)

$$\boxed{\underline{j}_p(\underline{r},t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{P}(\underline{r},t)} \quad \circledast$$

aus $\nabla \cdot \underline{P}(\underline{r},t) = -\rho_p(\underline{r},t)$ folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_p(\underline{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \underline{P}(\underline{r},t) \right)$$

$$= -\nabla \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \underline{P}(\underline{r},t) \right)$$

$$= -\nabla \cdot \underline{j}_p(\underline{r},t)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho_p(\underline{r},t) + \nabla\cdot \underline{j}_p(\underline{r},t) = 0}$$

Polarisations-Ladungsdichte und Polarisationsstrom erfüllen Kontinuitätsgleichung!

Zum Magnetisierungsstrom

resultiert aus der Bewegung von den e^- in den Atomen um die Kerne

→ mikroskopische Kreisströme

→ magnet. Momente (aus Bahn- und Spinbewegung!)

Beachte: Diese $\overset{\text{mikroskop.}}{}$ magnet. Momente $\underline{m}_i(t)$ sind permanent (also auch ohne äußeres Feld vorhanden!)

Im äußeren magnetischen Feld $\underline{B}^{ext}$ orientieren sich diese Momente bevorzugt parallel zum Feld

$$W = -\underline{m}_i \cdot \underline{B}^{ext}$$

potentielle Energie

Annahme:

Resultierendes (effektives) Feld im Innern des Materials:

$$\textcircled{*} \quad \underline{B} = \underbrace{\underline{B}^{ext}}_{\text{äußeres Feld}} + \underbrace{\underline{B}_{mag}}_{\text{Zusatzbeitrag}}$$

benutze:

$$\nabla \times \underline{B}^{ext} = \mu_0 \, j^{ext}$$

analog zu:

$$\nabla \cdot \underline{E}_P = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho_P$$

$$\rho_P = - \nabla \cdot \underline{P}$$

Ansatz:

$$\boxed{\begin{array}{l} \nabla \times \underline{B}_{mag} = \mu_0 \, j_{mag} \\ \qquad\qquad \text{mit } j_{mag} = \nabla \times \underline{M} \end{array}}$$

Dabei ist $\underline{M} = \underline{M}(\underline{r}, t)$ die makroskopische Magnetisierung!

$\underline{M}(\underline{r}, t)$ ist wieder ein räumliches (und effektiv auch zeitlichen) Mittelwert

$$\underline{M}(\underline{r},t) = \frac{1}{\Delta V}\int_{\Delta V} d\underline{s}\ \underbrace{\underline{M}_{\text{mikro}}(\underline{r}+\underline{s},t)}_{\sum_{i \text{ in } \Delta V} m_i(t)\,\delta(\underline{r}+\underline{s}-\underline{r}_i(t))}$$

Kombiniere:

$$\underline{B} = \underline{B}^{ext} + \underline{B}_{mag}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\underline{B} = \nabla\times\underline{B}^{ext} + \nabla\times\underline{B}_{mag} = \mu_0 j^{ext} + \mu_0 j_{mag}$$

$$= \mu_0 j_{ext} + \mu_0 \nabla\times\underline{M}$$

$$\rightarrow \nabla\times\left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B} - \underline{M}\right) = j^{ext}$$

definiere nun das makroskopische Magnetfeld in Materie:

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\underline{B} - \underbrace{\underline{M}}_{\text{Magnetisierungsbeitrag}}$$

$\rightarrow \nabla \times \underline{H} = \underline{j}^{ext}$!!