Wh.:

$$\underline{j}(\underline{r},t)^{\text{total}} = \underline{j}(\underline{r},t) + \underline{j}_{mag}(\underline{r},t) + \underline{j}_P(\underline{r},t)$$

Polarisation

$$\underline{j}_P \sim \dot{\underline{P}}$$

$$\underline{A}^{\text{total}}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\underline{r}' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}',t_{ret})^{\text{total}}}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

statische Überlegung $\left(\begin{matrix}\dot{\underline{P}}=0\\ \underline{j}_P=0\end{matrix} \; !\right)$

makroskop. Magnetisierung

$$\underline{B} = \underline{B}^{ext} + \underline{B}^{mag} \quad ; \quad \nabla\times\underline{B}^{mag} = \mu_0 \underline{j}_{mag}$$

Feld innen

$$\underline{j}_{mag} = \nabla\times\underline{M}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\underline{B} = \nabla\times(\underline{B}^{ext} + \underline{B}_{mag})$$

$$= \mu_0 \underline{j}^{ext} + \mu_0 \nabla\times\underline{M}$$

$$\rightarrow \nabla\times\left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B} - \underline{M}\right) = \underline{j}^{ext}$$

definieren: $\boxed{\underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\underline{B} - \underline{M}} \Leftrightarrow \underline{B} = \mu_0\underline{H} + \mu_0\underline{M}$

$$\Rightarrow \nabla \times \underline{H} = j^{ext} \quad \overset{!!}{..}$$

nur extern kontrollierbare Ströme tauchen auf!

analog: $\nabla \cdot \underline{D} = \rho^{ext}$

Diese Gleichung ist so nicht mehr gültig im dynamischen Fall, da man dort zusätzl. den Polarisationsstrom hat!

aber: Die Zusammenhänge

$$\underline{H}(\underline{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\underline{B}(\underline{r},t) - \underline{M}(\underline{r},t)$$

und $\nabla \times \underline{M}(\underline{r},t) = j_{mg}(\underline{r},t)$

gelten auch im zeitabhängigen Fall!

VI.3. Maxwell-Gleichungen in Materie

Startpunkt: Potentiale in Lorenzeichung

$$\phi(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d\underline{r}' \Big(\rho(\underline{r}';t_{ret}) + \underbrace{\rho_P(\underline{r}';t_{ret})}_{-\nabla\cdot\underline{P}(\underline{r}';t_{ret})}\Big)\cdot\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d\underline{r}' \Big(\underline{j}(\underline{r}';t_{ret}) + \underline{j}_{mag}(\underline{r}';t_{ret}) + \underbrace{\underline{j}_P(\underline{r}';t_{ret})}_{\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\underline{P}(\underline{r}';t_{ret})}_{\dot{\underline{P}}}}\Big)\cdot\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\Box\underline{A}(\underline{r},t) = -\mu_0\left(\underline{j} + \underline{j}_P + \underline{j}_{mag}\right)$$

$$\Box\phi(\underline{r},t) = -\frac{1}{\varepsilon_0}\left(\rho + \rho_P\right)$$

$$\Box\ldots = \Delta\ldots - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ldots$$

daraus die Felder:

$$\underline{E} = -\nabla\phi - \dot{\underline{A}}, \quad \underline{B} = \nabla\times\underline{A}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{aligned} \nabla \times \underline{E} &= -\dot{\underline{B}} \\ \nabla \cdot \underline{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ wie im „Vakuum"}$$

außerdem:

$$\nabla \cdot E = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \underline{A} - \triangle \phi$$

$$= -\Box \phi = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \underbrace{\rho_P}_{-\nabla \cdot \underline{P}})$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot (\underbrace{\varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}}_{\underline{D}}) = \rho$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \underline{D}(\underline{r}, t) = \rho(\underline{r}, t)$$

„freie, extern kontrollierbare Ladungen"

Schließlich:

$$\nabla \times \underline{B}(\underline{r}, t) = \nabla \times (\nabla \times \underline{A})$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \triangle \underline{A}$$

Lorenzeichung!

$$= -\Delta \underline{A} + \nabla\left(-\frac{1}{c^2}\dot{\Phi}\right)$$

$$= -\Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\nabla\Phi\right)}_{-\underline{E}-\dot{\underline{A}}}$$

$$= -\Box \underline{A} + \frac{1}{c^2}\dot{\underline{E}}$$

$$\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0\mu_0$$

$$= \mu_0\left(j + j_{mag} + j_p\right) + \varepsilon_0\mu_0\dot{\underline{E}}$$

$$\Rightarrow \nabla\times\underline{B} = \mu_0 j + \mu_0\underbrace{\nabla\times\underline{M}}_{j_{mag}} + \mu_0\dot{\underline{P}}$$

$$+ \varepsilon_0\mu_0\dot{\underline{E}}$$

$$= \mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\underline{E} + \underline{P}\right) + \mu_0\nabla\times\underline{M} + \mu_0 j$$

$$\Rightarrow \nabla\times\underbrace{\left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B} - \underline{M}\right)}_{\underline{H}} = j + \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left(\varepsilon_0\underline{E} + \underline{P}\right)}_{\underline{D}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\times\underline{H}(\underline{r},t) = j(\underline{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\underline{D}(\underline{r},t)}$$

Zusammenfassung:

$$\left.\begin{aligned} \nabla \times \underline{E} &= -\dot{\underline{B}} \\ \nabla \cdot \underline{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \underline{D} &= \rho \\ \nabla \times \underline{H} - \dot{\underline{D}} &= \underline{j} \end{aligned}\right\}$$

„wie im Vakuum"

aber $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$

$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B} - \underline{M}$

mit $\underline{P} \neq 0$, $\underline{M} \neq 0$ in Materie!

Beachte

In Materie müssen die Maxwellgleichungen durch sogenannte Materialgleichungen ergänzt werden!

$\Leftarrow$ Zusammenhänge zwischen

$\underline{P}$ und $\underline{E}$

$\underline{M}$ und $\underline{H}$

Im einfachsten Fall kann man mit folgenden Ansätzen arbeiten:

$$\underline{P}(\underline{r},t) = \varepsilon_0 \chi_e \underline{E}(\underline{r},t)$$

mit χ_e : elektrische Suszeptibilität

$$\underline{M}(\underline{r},t) = \chi_M \underline{H}(\underline{r},t)$$ mit χ_M : magnet. Suszeptibilität

mit diesen Ansätzen folgt:

$$\underline{D}(\underline{r},t) = \varepsilon_0 \underline{E}(\underline{r},t) + \underline{P}(\underline{r},t)$$

$$= \varepsilon_0 \underbrace{(1+\chi_e)}_{\varepsilon} \underline{E}(\underline{r},t)$$

$$= \varepsilon_0 \varepsilon \underline{E}(\underline{r},t)$$

mit $\boxed{\varepsilon = 1 + \chi_e}$

(relative) Dielektrizitätskonstante

$$\underline{B}(\underline{r},t) = \mu_0 \left(\underline{H}(\underline{r},t) + \underline{M}(\underline{r},t) \right)$$ $\boxed{\underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\underline{B} - \underline{M}}$

$$= \mu_0 (1+\chi_M) \underline{H}(\underline{r},t) = \mu_0 \mu \underline{H}(\underline{r},t)$$

mit $\mu = 1 + \chi_M$ (relative) Permeabilität

Die Konstanten χ_e, χ_M bzw.

ε und μ sind <u>Materialkonstanten</u>

(spezifisch für ein best. Material)

Berechnung durch mikroskop. Theorien (Quantenmechanik, Statist. Physik)

— oder Messung durch Experiment

Bemerkungen:

- Im Vakuumfall gilt $\chi_e = 0$, $\chi_\mu = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\varepsilon = \mu = 1}$

- Im allgemeinen hängen μ und ε von verschieden Parametern ab, (z.B. von der Temperatur, Druck)

  — und von den mikroskop. Details

- Speziell Ferromagneten:

  μ kann unendlich groß werden (Curie-Punkt)

Bemerkungen zur Gültigkeit des einfachen Ansatzes

$$\boxed{\underline{P} = \varepsilon_0 \chi_e \underline{E} \quad \text{und} \quad \underline{M} = \chi_\mu \underline{H}} \quad (*)$$

- (*) liefert skalaren Zusammenhang!

  gilt nur für isotrope Materie, wo keine Raumrichtung ausgezeichnet ist!

  Für Kristalle oder auch Flüssigkristalle hat man typischerweise Tensoren.

  $$\underline{P} = \varepsilon_0 \underline{\underline{\chi_e}} \, \underline{E}$$

  Tensor 2. Stufe!

- (*) liefert einen instantanen und lokalen Zusammenhang

  nur gültig, falls die Felder langsam veränderlich mit der Zeit

  nur gültig, wenn die Felder nur schwach inhomogen!

Andernfalls:

$$\underline{P}(\underline{r},t) = \varepsilon_0 \int\limits_{\text{Raum}} d\underline{r}' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'$$

$$\chi_e(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\, \underline{E}(\underline{r}', t')$$

räumliche und zeitliche Dispersion!

beachte: Die Funktion χ_e muß kausal sein,

d.h. $\chi_e = 0$ für $t' > t$

Obiger Zusammenhang ist ein

Beispiel für eine

„Lineare-Antwort-Theorie"

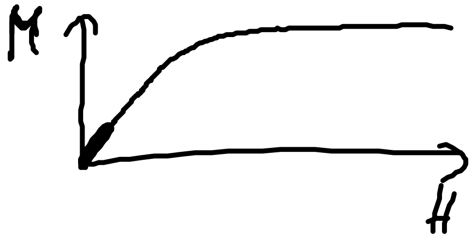
(„linear-response")

hier: $\underline{P} \hat{=}$ Antwort auf die äußere

"Störung" $\underline{E}$

• (*) liefert linearen Zusammenhang

— nur gültig, falls die Felder nicht zu stark sind!



Für starke Felder müssen nichtlineare Effekte berücksichtigt werden!

$$\underline{P} = \varepsilon_0 \left(\chi_e \underline{E} + \chi_e^{(3)} (\underline{E})^2 \underline{E} + \dots \right)$$

kubische Suszeptibilität

VI.4. Mikroskopisches Modell zur Polarisierbarkeit und elektr. Suszeptibilität (statisch)

Ziel: Berechnung der Konstante χ_e für ein homogenes, isotropes, lineares Medium

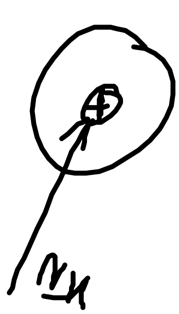
$$\underline{P} = \varepsilon_0 \chi_e \underline{E}$$

← anhand eines einfachen mikroskopischen Modelles!

Betrachte zunächst ein 1-Teilchen-System in dem ein Dipolmoment induziert werden kann!

Betrachte 1 einzelnes Atom (klassisches Atommodell)

- Punktförmiger Kern mit Ladung $Q_K = \underbrace{Z}_{\text{Kernladungszahl}}\underbrace{e}_{\text{Elementarladung}} > 0$ am Ort $\underline{r}_K$



- homogen verteilte Elektronenladung $Q_e = -Ze$ am Ort (Schwerpunkt der Elektronen) $\underline{r}_e$

falls $\underline{r}_e \neq \underline{r}_K$ "Ladungstrennung"

$\longrightarrow$ induziertes Dipolmoment $\underline{p}$

Elektrisches Feld, das durch die Elektronen erzeugt wird $\hat{=}$ Feld im Innern einer homogen geladenen Kugel!

$$\underline{E}_e(\underline{r}) = \frac{Q_e}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\underline{r}-\underline{r}_e}{R^3}$$ mit R Atomradius

$\Rightarrow$ Kraft auf den Kern

$$\underline{F}_K = Q_K\,\underline{E}_e(\underline{r}_K)$$
$$= -\frac{Z^2e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(\underline{r}_K-\underline{r}_e)$$

analog: Kraft auf die Elektronen durch den Kern:

$$\underline{F}_e = -\underline{F}_K$$

⇒ Bewegungsgleichung in Anwesenheit eines zusätzlichen äußeren Feldes $\underline{E}^{ext}$

$$m_K \ddot{\underline{r}}_K = \underline{F}_K + Q_K \underline{E}^{ext}$$

$$= -\frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(\underline{r}_K - \underline{r}_e) + Ze\,\underline{E}^{ext}$$

$$Z m_e \ddot{\underline{r}}_e = \underline{F}_e + Q_e \underline{E}^{ext} = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(\underline{r}_K - \underline{r}_e) - Ze\,\underline{E}^{ext}$$

Führe

$\underline{r} = \underline{r}_K - \underline{r}_e$ Relativkoordinate

$$\rightarrow \quad \ddot{\underline{r}} = -\frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\left(\frac{1}{m_K} + \frac{1}{Z m_e}\right)\underline{r} + Ze\left(\frac{1}{m_K} + \frac{1}{Z m_e}\right)\underline{E}^{ext}$$

$$m_K \gg Z m_e$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{m_K} + \frac{1}{Z m_e} \approx \frac{1}{Z m_e}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\underline{r}} = -\frac{Z^2 e^2}{4\pi \varepsilon_0 R^3} \frac{1}{Z m_e} \underline{r} + \frac{Ze}{Z m_e} \underline{E}^{ext}$$

definiere

$$\omega_0^2 = \frac{Z e^2}{4\pi \varepsilon_0 m_e R^3}$$

Schwingungsfrequenz (abhängig von mikroskop. Parametern!)

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\underline{r}} + \omega_0^2 \underline{r} = \frac{e}{m_e} \underline{E}^{ext}}$$

Bewegungsgl. eines harmonischen Oszillators!

Stationärer Zustand:

$$\ddot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 \underline{r} = \frac{e}{m_e} \underline{E}^{ext}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{r} = \frac{e}{m_e \omega_0^2} \underline{E}^{ext}}$$

beachte: Dipolmoment ist proportional zu $\underline{E}$!