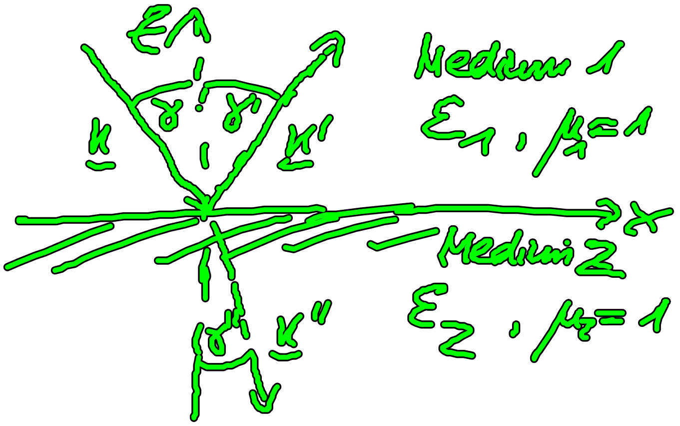
wie:



Einfallende Welle:

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(\underline{k}\cdot\underline{r}-\omega t)}$$

Grenzfläche in der x-y-Ebene bei z=0

$$\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$$

Amplitudenverhältnisse

- $\underline{E}$ ist senkrecht zur Einfallsebene linear polarisiert
  ↳ x-z-Ebene

$$E_0 = E_{0,y}\,\hat{e}_y$$

man findet:
(Fresnel'schen Formeln)

$$\frac{E'_{0y}}{E_{0y}} = \frac{\sin(\gamma''-\gamma)}{\sin(\gamma''+\gamma)}$$ (reflektierter Anteil)

und

$$\frac{E''_{0y}}{E_{0y}} = \frac{2\sin\gamma''\cos\gamma}{\sin(\gamma''+\gamma)}$$ (transmittierter Anteil)

Häufig man auch die Amplitudenquadrate!

$$\left|\frac{E'_{0y}}{E_{0,y}}\right|^2 = \frac{\sin^2(\gamma''-\gamma)}{\sin^2(\gamma''+\gamma)} = R_\perp$$

$$\left|\frac{E''_{0y}}{E_{0y}}\right|^2 > \frac{4\sin^2\gamma''\cos\gamma}{\sin^2(\gamma''+\gamma)} = T_\perp$$

Reflexions- und Transmissionskoeffizient für senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Licht!

man kann zeigen: $R_\perp + T_\perp = 1$

Warum die Quadrate

- Erinnerung: $\underbrace{\text{Energiedichte}}_{\text{Intensität}}$ elektromagnetische Felder $w(\vec{r},t) \sim \vec{E}^2, \vec{B}^2$!

- ~~Bez~~ Bezug zum Poyntingvektor

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H} = \underline{E} \times \frac{1}{\mu_0}\underline{B}$$

$$= \frac{1}{\omega\mu_0}\,\underline{E} \times (\underline{k} \times \underline{E})$$

wegen $\underline{k} \times \underline{E} = \omega \underline{B}$

$$= \frac{1}{\omega\mu_0}\left(\underline{k}\cdot(\underline{E})^2 - \underline{E}\,\cancel{(\underline{k}\cdot\underline{E})}\right)$$

$$= \frac{1}{\omega\mu_0}(\underline{E})^2\,\underline{k}$$

- Fall b) Einfallende Welle ist linear polarisiert <u>in</u> der Einfallsebene

$$\underline{E}_0 = E_{0x}\,\hat{\underline{e}}_x + E_{0z}\,\hat{\underline{e}}_z$$

→ Übung!

Ergebnis:

$$R_{\parallel} = \frac{\tan^2(\gamma-\gamma'')}{\tan^2(\gamma+\gamma'')}$$

$$T_{\parallel} = 1 - R_{\parallel}$$

Bemerkungen zu den Fresnel'schen Formeln

i) Brechungsindex $n=\sqrt{\varepsilon \underset{\approx 1}{\mu}} = \sqrt{\varepsilon}$ in den beiden Medien gleich (d.h., faktisch gibt es gar keine Grenzfläche!)

$$n_1 = n_2 \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} \gamma = \gamma''$$

Snellius'sches Brechungsgesetz $\dfrac{\sin\gamma''}{\sin\gamma} = \dfrac{n_1}{n_2}$

man findet aus den Fresnel'schen Formeln

$$R_{\parallel} = 0$$

$$R_{\perp} = 0$$

d.h. keine Reflexion (wie zu erwarten!) unabhängig von der Polarisation!

(i) Betrachte in der Einfallsebene polarisiertes Licht

$$R_\parallel = \frac{\tan^2(\gamma-\gamma'')}{\tan^2(\gamma+\gamma'')}$$

Sei nun $\gamma+\gamma''=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \tan(\gamma+\gamma'') = \tan\frac{\pi}{2}$$

$$= \infty \qquad !$$

$\Rightarrow R_\parallel = 0$ d.h. keine Reflexion!

Definition des sogenannten Brewster-Winkels

$$\gamma + \gamma'' = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma'' = \gamma_B$$

„Brewster-Winkel"

$$\longrightarrow \cos\gamma_B = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma''\right)$$

$$= \sin\gamma'' \quad \circledast$$

aus Snellius:

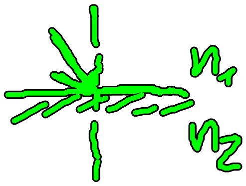
$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin\gamma''}{\sin\gamma} \underset{\overset{\uparrow}{\circledast}}{=} \frac{\cos\gamma_B}{\sin\gamma_B} = \cot\gamma_B$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\gamma_B = \frac{1}{\cot\gamma_B} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}$$

Bemerkung:

Für Licht, das linear senkrecht zur Einfallsebene polarisiert (oder das elliptisch polarisiert), ist der Reflexionskoeffizient jedoch ungleich Null!

(iii) Totalreflexion



Kann auftreten bei Wellen, die von

einem optisch dichteren in ein
optisch dünneres Medium eintreten !

d.h. $n_1 > n_2 \xrightarrow[\text{Snellius}]{} \gamma'' > \gamma$

(Ausfallswinkel >
Einfallswinkel)

Es kann so sein, daß γ'' auf $\frac{\pi}{2}$ anwächst
$\Longleftrightarrow$ Welle läuft parallel zur Grenzfläche!

Der Grenzwinkel zur Totalreflexion
ist dadurch definiert, daß:

$$\gamma'' \overset{!}{=} \frac{\pi}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \sin\gamma'' = 1$$

$$\xRightarrow[\text{Snellius}]{} \frac{\sin\gamma''}{\sin\gamma} = \frac{n_1}{n_2} \overset{\text{Totalreflexion}}{=} \frac{1}{\sin\underset{\uparrow\,\text{Grenzwinkel}}{\gamma_G}}$$

$$\Longrightarrow \sin\gamma_G = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

Was passiert für $\gamma > \gamma_G$??

benutze:

$$\sin\gamma'' = \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}$$

$$\Longrightarrow \cos\gamma'' = \sqrt{1-\sin^2\gamma''}$$

$$= \sqrt{1-\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}\right)^2}$$

Man sieht:

Für $\underbrace{\gamma > \gamma_G}_{\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G} > 1}$ wird $\cos\gamma''$ rein imaginär!!

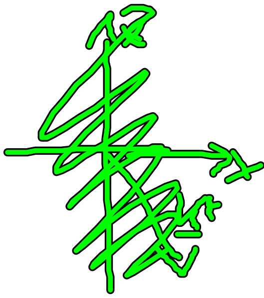
$$\cos\gamma'' = i\sqrt{\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}\right)^2 - 1}$$

Folgerungen für das Feld im Medium 2

$$E'' = \underline{E}_0'' \, e^{i(\underline{k}''\cdot r - \omega t)}$$

transmittierte Welle

mit $\underline{k}'' = \begin{pmatrix} k_x'' \\ 0 \\ k_z'' \end{pmatrix}$



$$\underline{E}'' = \underline{E}_0'' e^{ik_x'' x + ik_z'' z} e^{-i\omega t}$$

benutze: $k_x'' = k'' \sin\gamma''$

$$k_z'' = k'' \cos\gamma'' - \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma''} k \cos\gamma''$$

Einsetzen

$$\Rightarrow \underline{E}'' = \underline{E}_0'' e^{ik'' \sin\gamma'' x} e^{ik'' \cos\gamma'' z} e^{-i\omega t}$$

$$= \underline{E}_0'' e^{ik'' \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G} x} e^{ik'' \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}\right)^2} z} e^{-i\omega t}$$

Betrachte $\gamma > \gamma_G$

$$\Rightarrow \underline{E}'' = \underline{E}_0'' e^{ik'' x \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}} \underbrace{e^{ik'' i \sqrt{\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}\right)^2 - 1} z - i\omega t}}_{e^{-k'' z \sqrt{\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma_G}\right)^2 - 1}}}$$

man sieht

- Das Feld wird nur in x-Richtung (also entlang der Grenzfläche) propagiert!

- Feld verschwindet exponentiell mit z!

  $\uparrow$ Abstand von der Grenzfläche!

- Analyse des Poyntingvektors im Medium 2: $\underline{S}'' = \frac{1}{\omega\mu_0}(\underline{E}'')^2\,\underline{k}''$ bzw. $\mathrm{Re}(\underline{S}'') = \frac{1}{\omega\mu_0}\,\mathrm{Re}\,\underline{k}''\cdot\mathrm{Re}(\underline{E}'')^2$

$\Rightarrow$ kein Energiefluss in das Medium 2 hinein!!

VI.7. Wellenausbreitung in elektrischen Leitern

Betrachte Material mit $\rho(\underline{r},t)=0$

(keine freien Ladungen!)

aber $\underline{j}(\underline{r},t) \neq 0$ $\Leftrightarrow$ „Leiter"!

Ansatz : $\underline{j}(\underline{r},t) = \sigma\, \underline{E}(\underline{r},t)$

Leitfähigkeit ("Keine Raumladungsdichte")

Annahme hier:

σ skalar, unabhängig von der Frequenz!

Maxwell-Gleichungen

(mit $\underline{D} = \varepsilon_0 \varepsilon\, \underline{E}$

$\underline{H} = (\mu_0 \mu)^{-1}\, \underline{B}$)

① $\nabla \cdot \underline{E} = 0$

② $\nabla \cdot \underline{B} = 0$

③ $\nabla \times \underline{E} = - \dot{\underline{B}}$

④ $$\nabla \times \underline{B} = \underbrace{\mu_0 \mu \underbrace{\sigma\, \underline{E}}_{\underline{j}}}_{\text{neuer Term!}} + \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0\, \varepsilon \mu}_{\frac{n^2}{c^2}} \dot{\underline{E}}$$

mit $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$

$\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0 \mu_0$

Bemerkung zur Annahme $\rho(\underline{r},t) = 0$

aus ④

$$\nabla\cdot(\nabla\times\underline{B}) = 0$$

$$= \mu\mu_0\sigma\nabla\cdot\underline{E} + \frac{n^2}{c^2}\nabla\cdot\dot{\underline{E}} \quad \circledast$$

④ ↗

Sei $\varrho(\underline{r}, t>0) \neq 0$

$$\Longrightarrow \nabla\cdot\underline{E}(\underline{r}, t>0) = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\varrho(\underline{r}, t>0)$$

Einsetzen in $\circledast$

$$\Rightarrow \frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}\sigma\varrho(\underline{r},t) + \mu\mu_0\dot{\varrho}(\underline{r},t) = 0 \quad , t>0$$

$$\Longleftrightarrow \dot{\varrho}(\underline{r},t) = -\frac{1}{\tau}\varrho(\underline{r},t)$$

mit $\tau = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}$

Lösung: $\varrho(\underline{r},t) = \varrho(\underline{r},t=0)e^{-t/\tau}$

Interpretation:

- Ein anfangs geladener Leiter verliert diese Ladung exponentiell!
- Wenn der Leiter anfangs ungeladen war, so ist er das für alle Zeiten!

Zurück zur Maxwell-Gleichung ③

$$\nabla\times(\nabla\times\underline{E}) = \nabla(\underbrace{\cancel{\nabla\cdot\underline{E}}}_{0}) - \Delta\underline{E} \overset{(3)}{=} -\nabla\times\dot{\underline{B}}$$

benutze:

$$-\nabla\times\dot{\underline{B}} \overset{(4)}{=} -\mu_0\mu\sigma\dot{\underline{E}}$$

$$-\frac{n^2}{c^2}\ddot{\underline{E}}$$

$$\rightarrow \Delta \underline{E} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\underline{E} - \mu_0 \mu \sigma \dot{\underline{E}} = 0$$

$$\boxed{\left[\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t}\right] \underline{E}(\underline{r}, t) = 0} \quad \circledast$$

⊛ ist eine Verallgemeinerung der homogenen Wellengleichung für den Fall

$\sigma \neq 0 \Longleftrightarrow j \neq 0$!

man nennt ⊛ (vor allem in einer Dimension)

$\underline{\underline{\text{„Telegraphengleichung"}}}$