VI. 7. Wellenausbreitung in elektr. Leitern

Betrachte Material mit $\rho(\underline{r},t)=0$,
aber $\underline{j}(\underline{r},t)\neq 0$

(ladungsneutralen, unendl. Leiter)

$\longrightarrow$ Leiter!

Ansatz: $\underline{j}(\underline{r},t) = \sigma\,\underline{E}(\underline{r},t)$

(homogenes, isotropes Medium)

Maxwell - Glg.

(1) $\nabla \cdot \underline{E}(\underline{r},t) = 0$

(2) $\nabla \cdot \underline{B}(r,t) = 0$

(3) $\nabla \times \underline{E} = -\dot{\underline{B}}(r,t)$

(4) $\nabla \times \underline{B} = \mu_0 \mu \sigma \underline{E}(\underline{r},t) + \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \mu}_{n^2/c^2} \dot{\underline{E}}(\underline{r},t)$; $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$

$$\rightsquigarrow \nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = \nabla(\cancel{\nabla \cdot \underline{E}}) - \Delta \underline{E}$$

$$\overset{(3)}{=} -\nabla \times \dot{\underline{B}} \overset{(4)}{=} -\mu_0 \mu \sigma \dot{\underline{E}} - \frac{n^2}{c^2} \ddot{\underline{E}}$$

$$\rightsquigarrow \Delta \underline{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underline{E} - \mu_0 \mu \sigma \dot{\underline{E}} = 0$$

$$\boxed{\left(\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t}\right) \underline{E}(\underline{r},t) = 0}$$

„Telegraphengleichung"

<u>math.</u> gedämpfte Wellengleichung !

Beachte

analog $\nabla \times (\nabla \times \underline{B}) = \nabla\cancel{(\nabla \underline{B})} - \Delta \underline{B}$

mit Maxwell

$$\left(\left(\Delta - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t}\right)\underline{B}(\underline{r}, t) = 0$$

$\curvearrowright$ $\underline{B}$ erfüllt ebenfalls Telegraphengl.!

Ansatz für $\underline{E}(\underline{r}, t)$:

harmon. ebene Welle $\underline{E}(\underline{r}, t) = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\underline{r} - \omega t)}$

Einsetzen

$$\curvearrowright -k^2 \underline{E}(\underline{r}, t) - \frac{n^2}{c^2}(-\omega^2)\underline{E}(\underline{r}, t) - \mu_0 \mu \sigma (-i\omega)\underline{E}(\underline{r}, t) = 0$$

$$-k^2 + \frac{n^2 \omega^2}{c^2} + \mu_0 \mu i \omega \sigma = 0$$

$$k^2 = \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\,\frac{\mu_0 c^2 \sigma}{\varepsilon \omega}\right) \quad ; \quad c = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}} \quad n = \sqrt{\varepsilon \mu}$$

$$= \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\,\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega}\right)$$

definiere: $\tau = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma}$ „Relaxationszeit"

$$\rightsquigarrow \boxed{k^2 = \varepsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i \frac{1}{\omega \tau}\right)} \quad (*)$$

- Wellenzahl wird komplex!
- Für $\sigma = 0$ $(\tau \to \infty)$ erhält man das alte Resultat für k^2

jetzt: setze $k = \frac{\omega}{c} \tilde{n}$

$$= \frac{\omega}{c}(\bar{n} + i \chi)$$

$\tilde{n}$: komplexer Brechungsindex!

$$\Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\bar{n}^2 - \chi^2 + 2 i \bar{n} \chi\right)$$

$$\overset{!}{\underset{(*)}{=}} \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu \left(1 + i \frac{1}{\omega \tau}\right)$$

Relaxationszeit

$\Rightarrow$ Bestimmungsglg. für $\bar{n}, \chi$ als Funktion von $\underbrace{\varepsilon, \mu, \sigma}$!

Materialparameter

$$\Rightarrow \boxed{\bar{n}^2 - \gamma^2 = \varepsilon\mu} \quad \text{A}$$

$$2i\bar{n}\gamma = i\varepsilon\mu\frac{1}{\omega\tau}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\bar{n}\gamma = \frac{\varepsilon\mu}{2\omega\tau} = \frac{\mu\sigma}{2\varepsilon_0\omega}} \quad \text{B}$$

Löse B nach γ auf und setze in A ein:

$$\Rightarrow \bar{n}^2 = \varepsilon\mu + \gamma^2 = \varepsilon\mu + \left(\frac{\mu\sigma}{2\varepsilon_0\omega\bar{n}}\right)^2 \quad /\cdot\bar{n}^2$$

$$\bar{n}^4 = \varepsilon\mu\bar{n}^2 + \left(\frac{\mu\sigma}{2\varepsilon_0\omega}\right)^2$$

$$\rightsquigarrow \bar{n}^4 - \varepsilon\mu\bar{n}^2 = \left(\frac{\mu\sigma}{2\varepsilon_0\omega}\right)^2$$

$$\bar{n}^2 = \frac{\varepsilon\mu}{2} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{(\varepsilon\mu)^2}{4} + \frac{(\varepsilon\mu)^2}{4}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon\omega}\right)^2}}_{>\varepsilon\mu/2}$$

da $\bar{n}$ per Definition reell ist, muss die positive Wurzel genommen werden!

$$\boxed{\bar{n}^2 = \frac{\varepsilon\mu}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega}\right)^2}\right]}$$

ebenso folgt: $\varkappa^2 = \frac{\varepsilon\mu}{2}\left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega}\right)^2}\right]$

<u>Bemerkungen</u>

- Für $\sigma \to 0$ folgt:

$$\left.\begin{aligned} \bar{n}^2 &\to \frac{\varepsilon\mu}{2}(1+1) = \varepsilon\mu \\ \varkappa &\to 0 \end{aligned}\right\} \text{alte Resultate!}$$

- Für $\sigma \neq 0$ nennt man $\hat{n} = \bar{n} + i\varkappa$

„verallgemeinerter Brechungsindex"

Einsetzen in Ansatz:

$$\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0\, e^{i(\underline{k}\,\underline{r} - \omega t)}, \quad \text{def. } \hat{\underline{k}} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$$

$$= \underline{E}_0\, e^{i\left(\frac{\omega}{c}\tilde{n}\,\hat{\underline{k}}\cdot\underline{r} - \omega t\right)} \qquad |\underline{k}| = \frac{\omega}{c}\tilde{n}$$

$$= \underline{E}_0\, e^{i\frac{\omega}{c}(\bar{n} + i\gamma)\,\hat{\underline{k}}\cdot\underline{r} - i\omega t}$$

$$= \underline{E}_0\, e^{-\gamma\frac{\omega}{c}\hat{\underline{k}}\cdot\underline{r}}\; e^{i\left(\frac{\omega}{c}\bar{n}\,\hat{\underline{k}}\cdot\underline{r} - \omega t\right)}$$

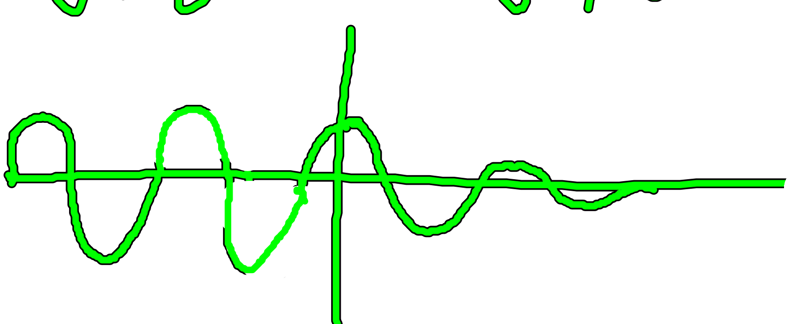
z.B. $\hat{\underline{k}} = \hat{\underline{e}}_z$

$$\rightsquigarrow \boxed{\underline{E}(\underline{r},t) = \underline{E}_0\, e^{-\gamma\frac{\omega}{c}z}\; e^{i\left(\frac{\omega}{c}\bar{n}z - \omega t\right)}}$$

gedämpfte ebene Welle!

man nennt γ den „Extinktionskoeffizienten"

$\sigma = 0$ $\qquad$ $\sigma \neq 0$



physikal.:
Dämpfung resultiert aus der Bildung von Wärme im elektr. Leiter.

Bemerkungen

- Dämpfung $\curvearrowright$ Welle dringt nicht beliebig weit in das Leitermaterial ein.

„Eindringtiefe" $\hat{=}$ Entfernung Δz, nach der die Amplitude auf den e-ten Teil gedämpft ist.

$$\|$$

$$\delta = \frac{c}{\omega \gamma}$$

- Folgerung für $\underline{B}$

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \underline{B}_0 \, e^{i(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t)}$$

Einsetzen in die Maxwell glg.

$\Longrightarrow$ $\hat{\underline{k}}, \underline{E}_0, \underline{B}_0$ bilden wieder Rechtssystem

<u>aber</u>: Phasenverschiebung!

<u>denn</u>: $\underline{B}_0 = \frac{\tilde{n}}{c} (\hat{\underline{k}} \times \underline{E})$

mit $\hat{n} = \bar{n} + i\varkappa = \underbrace{\sqrt{\bar{n}^2 + \varkappa^2}\, e^{i\varphi}}_{\text{Polardarst.}}$; (mit $\tan\varphi = \frac{\varkappa}{\bar{n}}$)

$$\Rightarrow \underline{B} = \frac{\sqrt{\bar{n}^2 + \varkappa^2}}{c} (\hat{\underline{k}} \times \underline{E}) e^{i\varphi}$$ ← Phasenversch.!

(beachte: $\varphi = 0$ für $\varkappa = 0 \Leftrightarrow \sigma \to 0$)

- Phasengeschwindigkeit

Bewegung einer Ebene der Welle mit konst. Phase $\varphi^{(0)}$

$$\underline{k}\Big|_{\text{Realteil}} \cdot \underline{r} - \omega t \stackrel{!}{=} \text{const}$$

$$\curvearrowright \quad \frac{\omega}{c} \bar{n} \hat{\underline{k}} \cdot \underline{r} - \omega t = \text{const.}$$

<u>1dim</u>: $\quad \frac{\omega}{c} \bar{n} z - \omega t = \text{const} \quad (\hat{\underline{k}} = \hat{\underline{e}}_z)$

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{c}{\omega \bar{n}}(\omega t + \text{const})\right) = \frac{c}{\bar{n}}$$

<u>beachte</u>: Für $\sigma \neq 0$ ist $\bar{n} > n$

$\curvearrowright$ die Phasengeschwindigkeit ist im Leiter kleiner als im Isolator!

· **Verhalten in sehr guten Leitern (σ groß):**

$$\Rightarrow k^2 = \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega}\right)$$

$$(*) \quad \simeq \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} \frac{i}{\omega \tau} \quad ; \quad \tau = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\sigma}$$

gleichbedeutend: $1 \ll \frac{1}{\omega\tau} \Leftrightarrow \tau \ll \frac{1}{\omega}$

wegen: $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\hat{n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\bar{n}^2 - \gamma^2 + 2i\bar{n}\gamma\right)$

Vgl. mit $(*)$ $\curvearrowright$ $\bar{n}^2 - \gamma^2 \simeq 0$ verschwindender Realteil!

und $\bar{n}\gamma \simeq \bar{n}^2 \simeq \gamma^2 = \frac{\varepsilon\mu}{2\omega\tau}$

Resultierende Eindringtiefe

$$\delta = \frac{c}{\omega \gamma} \simeq \mathcal{O}(\mathrm{cm}) \quad \text{für} \quad \omega = 100\,\mathrm{Hz}$$

hochfrequente Wellen dringen also quasi nicht in ein Metall ein!