Wh.: $\varepsilon(\omega) \longrightarrow n(\omega)$

- Phasen + Gruppengeschwindigkeit
- Kramers-Kronig !
- $\underline{P}(\underline{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, \chi_e(t-t') \, \underline{E}(\underline{r},t')$

mikroskop. Modell:

$$\ddot{\underline{P}}(t) + \gamma \dot{\underline{P}}(t) + \omega_0^2 \underline{P}(t) = \varepsilon_0 \omega_p^2 \underline{E}^{lokal}(t)$$

mit $\underline{P} = n Z e \underline{r}$, $\underline{P} = \underline{P}_0 e^{-i\omega t}$
n: Dichte $\qquad \underline{E}^{lokal} = \underline{E}_0 e^{-i\omega t}$

$\underline{E}^{lokal}(t) \approx \underline{E}(t)$ für kleine Dichte

$$\underline{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi_e(\omega) \underline{E}(\omega)$$

mit $\chi_e(\omega) = \dfrac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - \gamma i \omega}$

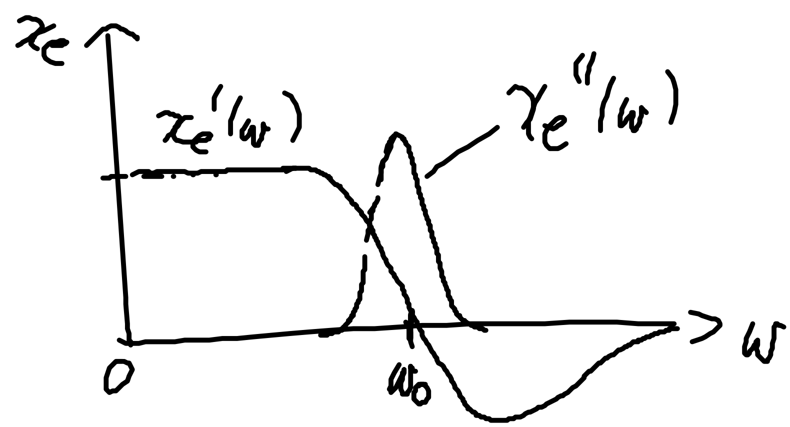
$\varepsilon(\omega) = 1 + \chi_e(\omega)$

ω_0^2, ω_p^2 : Input-Parameter (mikroskopisch !)

γ : phänomenologisch !

$$\chi_e'(\omega) = \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$ Realteil

$$\chi_e''(\omega) = \frac{\gamma\, \omega_p^2\, \omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2} \quad \text{Imaginärteil}$$



Bemerkungen

- Für $\gamma \to 0$ $\Rightarrow$ $\chi_e''(\omega) \to 0$

  d.h. verschwindende Dämpfung!

- Limes kleiner Frequenzen: „Statischer Limes"

  $\chi_e(\omega) \to \chi_e'(\omega)$ wird rein reell

  $\chi_e'(\omega \to 0) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} = \chi_e^{\text{statisch}}$!

- Bei $\omega = \omega_0$: „Resonanz"

  $\to$ $\chi_e''(\omega)$ hat einen Peak

$\chi_e'(\omega)$ wechselt sein Vorzeichen!

Energiedissipation von der Welle in das Medium!
„Resonanzabsorption"

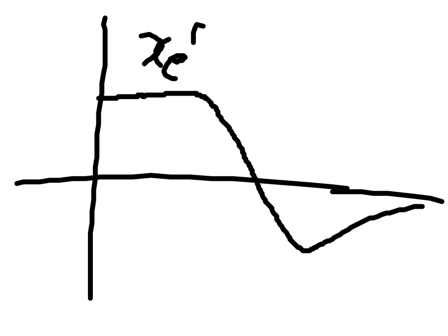
- Hohe Frequenzen: $\chi_e''(\omega)$ wird wieder sehr klein und verschwindet schließlich

$$\chi_e'(\omega) < 0$$

$$\underline{P}(\omega) = \varepsilon_0 \chi_e(\omega) \underline{E}(\omega)$$

$$\mathrm{Re}\, \underline{P} = \varepsilon_0 \chi_e'(\omega)\, \mathrm{Re}\, \underline{E}$$

In diesem Frequenzbereich ist die Reaktion (Polarisation) des Systems auf die Störung (Feld) gegenphasig!



generell:

$$\frac{d\chi_e'(\omega)}{d\omega} > 0 \quad \text{„normale Dispersion"}$$

$$\frac{d\chi_e'(\omega)}{d\omega} < 0 \quad \text{„anomaler Dispersion"}$$

(nur im Resonanzbereich!)

- Verhalten der Antwortfunktion in der Zeit:

$$\chi_e(\tau) = \frac{\omega_p^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2 - \gamma\omega i}$$

Zeit bzw. Zeitdifferenz

Nenner hat Pole bei

$$\omega_{1,2} = -i\gamma \pm \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Residuensatz!

Ergebnis:

$$\chi_e(\tau) = e^{-\gamma\tau} \frac{\omega_p^2}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} \sin\Big(\underbrace{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}_{\tilde{\omega}}\, t\Big)$$

$\Rightarrow$ $\chi_e(\tau)$ oszilliert mit einer Frequenz $\hat{\omega} = \sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$

$\Rightarrow$ Dämpfungsfaktor $\sim e^{-\gamma\tau}$

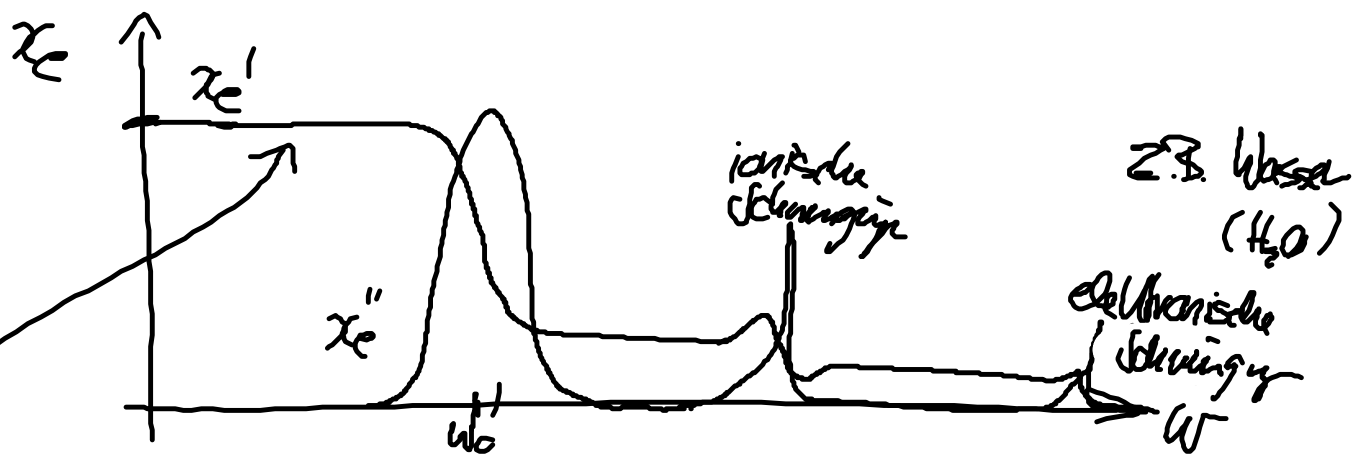
$\Rightarrow$ Relaxationszeit $t_\gamma = \frac{1}{\gamma}$

es gilt:

$$\chi_e(\tau) = 0 \quad , \quad \tau < 0 \quad \text{(Kausalität)}$$

Man kann zeigen:
Die Formeln für $\chi_e'(\omega)$ und $\chi_e''(\omega)$ aus dem Lorentzmodell erfüllen die Kramers-Kronig-Relation

• Responsefunktion (frequenzabhängig) für reale Materialien:



⇒ „Überlagerung" von Lorentz Oszillatoren und der
„zugehörigen Resonanzen!

Bereich, in dem die permanenten Dipolmomente der H_2O-Moleküle dem Feld folgen können:

VII. Spezielle Relativitätstheorie

Motivation

- elektromagnetische Phänomene (z.B. Wellenausbreitung) sind gekennzeichnet durch sehr hohe Geschwindigkeit!
$v \lessapprox c$

Grundfrage: Ändert sich dadurch etwas an den Maxwell-Gleichungen?

Klassische Mechanik

Hier ist aus experimenteller Erfahrung klar, daß Gesetzmäßigkeiten modifiziert werden müssen, falls $v \lessapprox c$

$\Rightarrow$ Großteil Theor. Phys. I gilt für $v \ll c$!

- **Elektrodynamik**

$\Rightarrow$ Maxwell-Gleichungen bleiben auch bei sehr hohen Geschw. gültig!

Die Maxwellgleichung sind invariant gegenüber Lorentztransformation!

VII.1. Inertialsysteme, Galilei-Transformation

(Erinnerung Klass. Mechanik / Newton'sche BWGL)

→ Inertialsysteme sind ausgezeichnete Koordinatensysteme, die sich gleichförmig und mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander bewegen!

In einem Inertial~~gesetz~~system gilt das Newton'sche Trägheitsgesetz: $\underline{F} = m \ddot{\underline{r}}$

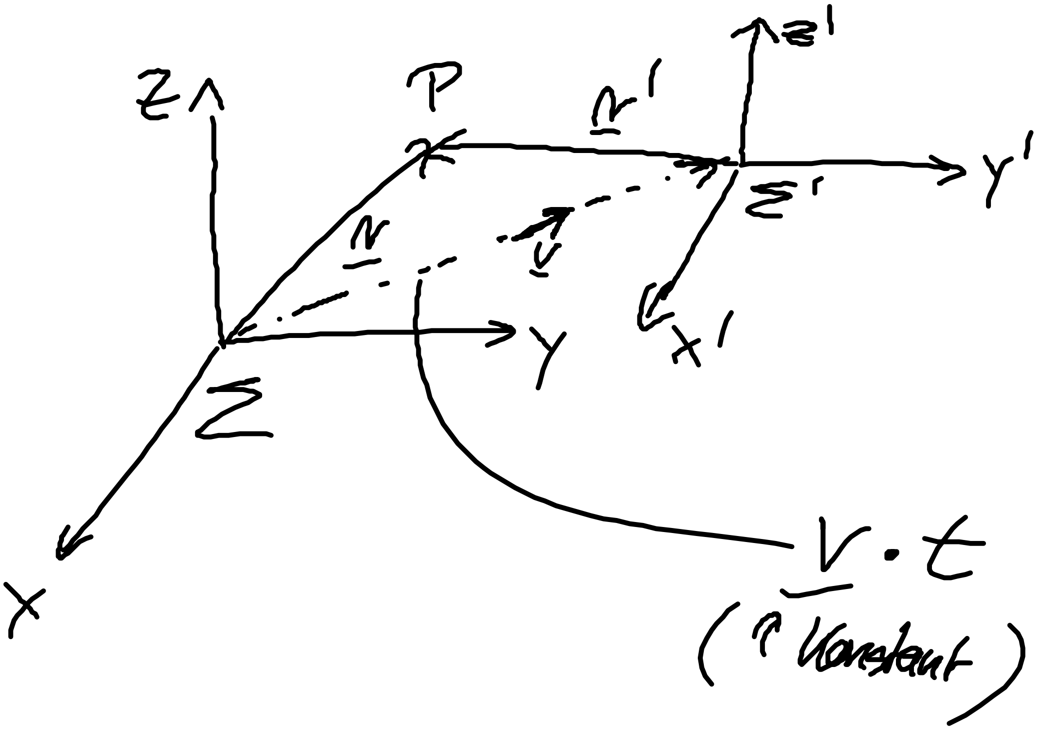
Obige Definition impliziert:

gegeneinander rotierende oder beschleunigte Koordinatensysteme sind keine Inertialsystem

speziell Rotation: Die BWGL enthält zusätzlich „Scheinkräfte" (Zentrifugal-, Corioliskraft)

Übergang zwischen den Koordinaten in zwei Inertialsystemen Σ und Σ'

Bei $t=0$ gelte $\Sigma = \Sigma'$



es gilt:

(*) $$\boxed{\underline{r} = \underline{r}' + \underline{v} \cdot t}$$ Galilei-Transformation

Bemerkungen

a) direkte Folgerung aus (*)

$$\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}}' + \underline{v}$$

$$\ddot{\underline{r}} = \ddot{\underline{r}}'$$

$$\rightarrow \underline{F} = m\ddot{\underline{r}} = m\ddot{\underline{r}}' = \underline{F}'$$

Newton'sche Trägheitsgesetz gilt in beiden Systemen (wie erwartet!)
(Voraussetzung: Masse konstant)

b) Die Zeit t wird bei Galilei-Transformation offenbar nicht geändert!

— Die Zeit ist „absolut" in der Newton'schen Mechanik!

Frage:

Was impliziert die Galilei-Transformation für elektromagnet. Vorgänge, z.B. Ausbreitung von Licht?!

Annahme:

Im Ursprung von Σ gebe es eine Lichtquelle, die sphärische Wellen (sog. Kugelwellen) aussendet

NB: Kugelwellen sind (ebenso wie ebene Welle) Lösungen der Maxwell-Gl. im Vakuum:

$$\underline{E}(\underline{r}) = E_0 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} \, \hat{\underline{e}}_r$$

$\uparrow$ radialer Einheitsvektor

$k = |\underline{k}|$

$r = |\underline{r}|$

Ausbreitungsgeschwindigkeit?

betrachte konstante Phase: $kr - \omega t = \text{const}$

$$r = \frac{\omega}{k} t + \text{const}$$

$$\dot{r} = \frac{\omega}{k} = c$$

außerdem: Falls $r=0$ bei $t=0$

so gilt $\text{const} = 0$

und $r = ct$

Zurück zur Kugelwelle in Σ

dort gilt: $r = ct$

$\dot{r} = c$

$\underline{\dot{r}} = c\,\underline{\hat{e}}_r$ mit $\underline{e}_r = \frac{\underline{r}}{r}$

(Kugelwelle, die bei $t=0$ im Ursprung von Σ losläuft!)

entsprechende Geschwindigkeit vom Inertialsystem Σ' aus gesehen („bewegter Beobachter")

$$\underline{\dot{r}}' \underset{\text{Galilei-Transformation}}{=} \underline{\dot{r}} - \underline{v} = c\,\underline{\hat{e}}_r - \underline{v}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\dot{r}}'$ ist richtungsabhängig und $|\underline{\dot{r}}'| \neq c$

Widerspruch zur experimentellen Erfahrung!

Diese zeigt, daß die Lichtgeschwindigkeit in alle Richtung gleich ist und unabhängig von der (gleichförmig geradlinigen) Bewegung des Beobachters relativ zur Quelle

z.B. Michelson-Morley-Experiment (Nobelpreis 1907)

$\Longrightarrow$ Galilei-Transformation ist nicht immer richtig!

VII.2. Einstein's Postulate

Motivation: Ausgang der Michelson-Morley-Experimente

$\rightarrow$ die Idee der "absoluten Zeit" und des "absoluten Raum" ist unhaltbar!

statt dessen

• Äquivalenzpostulat: (Einstein'sches Relativitätsprinzip

⇒ Sämtliche physikalischen Vorgänge laufen in allen Inertialsystemen gleich ab!

• Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c

ist unabhängig vom Inertialsystem!

(Postulat der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit)

Frage:

Wie muß die Transformation zw. Inertialsystemen beschrieben werden, so daß Einstein-Postulate erfüllt?

VII, 3. Die Lorentztransformation

Betrachte 2 Inertialsysteme Σ, Σ'

Annahme: • Σ ruht

• Σ' bewegt sich mit $\underline{v}$ (konstant)

• bei $t=0$ gilt $\Sigma = \Sigma'$

in Σ gilt für eine Kugelwelle:

$$|\underline{r}| = r = ct$$

$$\Leftrightarrow r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad (*)$$

Aus dem (zweiten) Einsteinpostulat folgt: Auch in Σ' muß gelten:

$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad (**)$$

(wir lassen also zu, daß sich die Zeit mittransformiert!)

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt die Invarianzbeziehung

$$\boxed{c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \overset{!}{=} c^2 t'^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)}$$

Führe neue Notation ein (Vierervektor)

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ \underline{r} \end{pmatrix}$$

Vierervektor im „Minkowski-Raum"

$x^0 = ct$ Zeitkomponente

$x^1, x^2, x^3 = x, y, z$ Raumkomponenten

Umschreiben der Invarianzbeziehung:

$$\boxed{\underbrace{(x^0)^2 - \sum_{\mu=1}^{3} (x^\mu)^2}_{s^2} \overset{!}{=} \underbrace{(x'^0)^2 - \sum_{\mu=1}^{3} (x'^\mu)^2}_{s'^2}}$$

Das „Längenquadrat" (s^2) des Vierervektors bleibt erhalten

$\Leftrightarrow$ Das Längenquadrat ist eine „Lorentz-Invariante"