Wh: Zwei Inertialsysteme $\Sigma, \Sigma'$

$\Sigma$: ruht

$\Sigma'$: bewegt sich relativ zu $\Sigma$ gleichförmig ~~mit~~ und mit konst. Geschwindigkeit

Galilei-Transformation

$$\boxed{\underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}\, t}$$

$\underline{r}'$: Ort in $\Sigma'$ $\quad$ $\underline{r}$: Ort in $\Sigma$

führt zu Widersprüchen für sehr schnelle Vorgänge, insbesondere für die Ausbreitung von Licht (Kugelwelle)

Auflösung: Einstein'sche Postulate

## VII.3. Lorentztransformation

es muß gelten

$$c^2 t^2 - r^2 \overset{!}{=} c^2 t'^2 - (r')^2 \quad (*)$$

umschreiben mit „Vierervektor"
im Minkowski-Raum $$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \underline{r} \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{*} \Rightarrow \underbrace{(x^0)^2 - \sum_{\mu=1}^{3} (x^\mu)^2}_{s^2} \overset{!}{=} \underbrace{(x'^0)^2 - \sum_{\mu=1}^{3} (x'^\mu)^2}_{s'^2}$$

Das „Längenquadrat" bleibt erhalten / ist lorentzinvariant!

## Wie lautet die konkrete Transformation?

- $\Sigma$ und $\Sigma'$ bewegen sich relativ zueinander mit $\underline{v} \parallel \hat{e}_z = \hat{x}^3$

  $\hat{e}_z$: Einheitsvektor in z-Richtung

- $\Sigma$ und $\Sigma'$ haben parallele Achsen

<u>Ansatz für die Transformation</u>

$$\textcircled{*} \quad (x')^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} \underbrace{L_{\mu\lambda}}_{\text{Element der Transformationsmatrix}} x^\lambda$$

Linear, da sonst gleichförmige Bewegung in $\Sigma$ keine gleichförmige Bewegung in $\Sigma'$ mehr wäre!

benutze zunächst $\underline{v} \parallel \underline{e}^3$

$\Rightarrow (x')^1 = x^1 = \cancel{x}$

$(x')^2 = x^2 = y$

und: $(x')^0$ und $(x')^3$ dürfen nicht von $x^1, x^2$ abhängen

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} L_{00} & 0 & 0 & L_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L_{30} & 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix}$$

Transformationsmatrix mit Komponente $L_{\mu\lambda}$

nutze jetzt die Invarianz des Längenquadrats

$$(x'^0)^2 - \cancel{(x'^1)^2} - \cancel{(x'^2)^2} - (x'^3)^2 \stackrel{!}{=} (x^0)^2 - \cancel{(x^1)^2} - \cancel{(x^2)^2} - (x^3)^2$$

$$\Rightarrow (x'^0)^2 - (x'^3)^2 = (x^0)^2 - (x^3)^2 \quad **$$

benutze (aus der Form von $\underline{\underline{L}}$) $\Rightarrow$ $x'^0 = L_{00} x^0 + L_{03} x^3$

$x'^3 = L_{30} x^0 + L_{33} x^3$

Einsetzen in (**) und Vergleich der Koeffizienten (von $x^0$ und $x^3$)

$$\Rightarrow L_{00}^2 - L_{30}^2 = 1$$

$$L_{33}^2 - L_{03}^2 = 1$$

$$L_{00} L_{03} - L_{30} L_{33} = 0$$

es gilt:
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Ansatz: $L_{33} = L_{00} = \cosh \chi$

$L_{30} = L_{03} = -\sinh \chi$

Festlegung von $\chi$ ?

Betrachte dazu Bewegung des Ursprungs des Koordinatensystems $\Sigma'$

- Von $\Sigma$ (nicht!) aus betrachtet:

$$x^3 = vt = \frac{v}{c} ct = \frac{v}{c} x^0$$

- Von $\Sigma'$ aus betrachtet:

$$\begin{aligned} x'^3 = 0 &= L_{30} x^0 + L_{33} x^3 \\ &= (\cosh \chi) x^3 - (\sinh \chi) x^0 \\ &= (\cosh \chi) \frac{v}{c} x^0 - (\sinh \chi) x^0 \\ &= x^0 \left( \frac{v}{c} \cosh \chi - \sinh \chi \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Klammer auf der rechten Seite verschwindet

$$\Rightarrow \frac{v}{c} \cosh \chi - \sinh \chi = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\tanh}_{\frac{\sinh}{\cosh}} \chi = \frac{v}{c}$$

es folgt:

$$\cosh \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\sinh \chi = \cosh \chi \tanh \chi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - \left(v/c\right)^2}}$$

Führe ein:

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Matrix der (spezielle) Lorentztransformation mit $\underline{v} \parallel \vec{x}_3$

explizit:

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma(z - \beta c t)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2} z}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c} z\right)$$

Bemerkungen:

- Für den allgemeinen Fall, dass die Koordinatensysteme gegeneinander verdreht sind, kann man ebenfalls ein $\underline{\underline{L}}$ finden!

- Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten.

$$\frac{v}{c} \ll 1 \implies \gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \to 1$$

dann folgt:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= z - vt \\ t' &= t \end{aligned}\right\}$$

„normale" Galilei-Transformation (für $\underline{v} \parallel \underline{e}_z$)

- Für $\frac{v}{c}$ nicht klein wird die Zeit offensichtlich mit-transformiert!

- Zur Notation:

$$(x')^\mu = \sum_{\lambda=0}^{3} L_{\mu\lambda} x^\lambda$$

Einstein'sche Summenkonvention.

$$(x')^\mu = L_{\mu\lambda} x^\lambda$$

(lasse Summen-Zeichen weg!)

über gleiche griechische Indizes nebeneinander stehender Größen wird summiert!

## VII.4. Folgerungen aus der Lorentztransformation

### a) Relativität der Gleichzeitigkeit

es gibt keine absolute Zeit; Zeit ist eine Frage des Bezugssystems!

Betrachte folgende Situation

- In $\Sigma$ finden zwei Ereignisse „gleichzeitig" an verschiedenen Orten $z_1, z_2$ statt

z.B. Aussendung von Lichtstrahlen

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 0$$

• Von $\Sigma'$ aus gesehen.

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} z_1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Gleichzeitigkeit in $\Sigma$!

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} z_2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} z_2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

<u>Zeitdifferenz in $\Sigma'$:</u>

$$\Delta t' = t_1' - t_2'$$

$$= \frac{\frac{v}{c^2}(z_2 - z_1)}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \neq 0 \quad \text{falls } z_2 \neq z_1 \text{ !!}$$

In $\Sigma'$ finden die Ereignisse nicht gleichzeitig statt!

$\hat{=}$ „Relativität der Gleichzeitigkeit"!

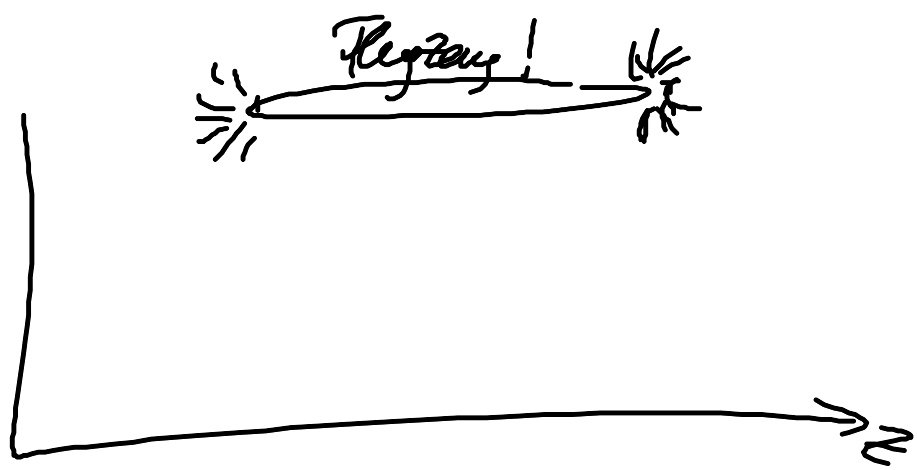
Beispiel:

$\Sigma' \hat{=}$ Flugzeug

$\Sigma \hat{=}$ Erde

gleichzeitige Aussendung von Lichtstrahlen vom Vorder- und Hinterteil des Flugzeugs aus ($z_1' \neq z_2'$, $t_1' = t_2'$)

$\Rightarrow$ impliziert, dass diese Lichtstrahlen auf der Erde nicht gleichzeitig ankommen!




b) Zeitdilatation

- Im $\Sigma$ werden am selben Ort $z$ zwei Lichtsignale im zeitlichen Abstand $\Delta t = t_2 - t_1$ ausgesendet (mit $t_2 > t_1$)

- Im bewegten System $\Sigma'$:

$$t_1' = \gamma \left( t_1 - \frac{vz}{c^2} \right)$$

$$t_2' = \gamma \left( t_2 - \frac{vz}{c^2} \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$\Rightarrow$ zeitlicher Abstand in $\Sigma'$

$$\Delta t' = t_2' - t_1'$$

$$= \gamma \, \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \Delta t' \geq \Delta t$$

Zeitintervall erscheint also dem bewegten Beobachter ($\Sigma'$) als „gedehnt"

$\Rightarrow$ Zeitdilatation

Man nennt $\Delta t$ (Zeitintervall im Ruhesystem $\Sigma$) die „Eigenzeit"

## Experimenteller Hinweis

Zerfall instabiler Elementarteilchen

$\mu^\pm$ - Mesonen

entstehen beim Eindringen kosmischer Strahlung in die Erdatmosphäre:

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_1 + \bar{\nu}_2$$

Elektron / Positron    Neutrino    Antineutrino

Zerfallsgesetz: $N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t}$

$\tau = \frac{1}{\lambda}$ „Zerfallszeit"

Die Mesonen haben eine sehr hohe Geschwindigkeit:

$$v(\mu^\pm) \approx 0.994\, c$$

Man findet:

Die auf der Erde gemessene Zerfallszeit ist viel größer als diejenige im Ruhesystem der Myonen!

$$t_W \approx 9\,\tau_W$$

Eigenzeit

Zerfallszeit im Ruhesystem

c) Längenkontraktion

betrachte einen Maßstab (Zollstock)

- Länge im ruhenden System ($\Sigma$)

  (beachte: gleichzeitige Messung der Koordinaten von Anfangs- und Endpunkt des Zollstocks!)

$$l = \Delta z = z_1 - z_2 \qquad \overset{\text{O.B.d.A.}}{(z_1 > z_2)}$$

- Länge in $\Sigma'$

$$l' = \Delta z' = z_1' - z_2'$$
$$= \gamma(z_1 - vt_1) - \gamma(z_2 - vt_2)$$
$$= \gamma(z_1 - z_2) - \gamma v(t_1 - t_2)$$

$$\rightarrow l' = \Delta z' = \gamma \underbrace{\Delta z}_{l} - \gamma v \Delta t \qquad (*)$$

Wichtig nun:

Längenmessung $\hat{=}$ gleichzeitiges Ablesen der Koordinaten! — auch in $\Sigma'$!

Richtige Vorgehensweise:

betrachte zuerst den Zeitunterschied

in $\Sigma'$:

$$t_1' = \left(t_1 - \frac{v}{c^2} z_1\right)\gamma$$

$$t_2' = \left(t_2 - \frac{v}{c^2} z_2\right)\gamma$$

$$\rightarrow \Delta t' = t_1' - t_2'$$

$$= \left(t_1 - t_2 - \frac{v}{c^2}(z_1 - z_2)\right)\gamma$$

$$= \left(\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta z\right)\gamma$$

$$\overset{!}{=} 0$$ da Messung in $S'$ gleichzeitig erfolgen soll!

$$\Delta t = \frac{v}{c^2}\Delta z$$

$$\neq 0 \quad !!$$

Einsetzen in ⊛

$$l' = \Delta z' = \gamma \Delta z - \gamma v \Delta t$$

$$= \gamma \Delta z - \gamma \frac{v^2}{c^2}\Delta z$$

$$= \gamma \Delta z \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$= \underbrace{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}_{\leq 1}\, \underbrace{\Delta z}_{l}$$

$$\Delta z' \leq \Delta z$$

$$l' \leq l$$

Längenkontraktion!

Bemerkung

Es wäre also falsch gewesen, in (*) einfach („naiv") $\Delta t = 0$ zu setzen.