

Wk: Zwei Inertialsysteme Σ, Σ'

$\uparrow$ mit $\uparrow$ bewegt sich
relativ zu Σ gleichförmig
mit konst. Geschwindigkeit

Galilei-Transformator

$$\boxed{\underline{r}' = \underline{r} - \underline{v} t}$$

$\text{Ort in } \Sigma' \quad \text{Ort in } \Sigma$

führt zu Widersprüchen für sehr schnelle Vorgänge,
insbesondere für die Ausbreitung von Licht (Lichtwellen)

Auflösung: Einsteinsche Postulate

III.3. Lorentztransformation

es muß gelten

$$c^2 t^2 - r^2 = c^2 t'^2 - (r')^2 \quad (*)$$

umschreiben mit 'Vektoren'
im Minkowski-Raum $x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$

$$\textcircled{*} \Rightarrow \underbrace{(x^0)^2 - \sum_{\mu=1}^3 (x^\mu)^2}_{s^2} = \underbrace{(x'^0)^2 - \sum_{\mu=1}^3 (x'^\mu)^2}_{s'^2}$$

Das "Längenquadrat" bleibt erhalten / ist Lorentzinvariant!

Wie lautet die Lorentz Transformation?

• Σ und Σ' bewegen sich relativ zueinander mit $\underline{v} \parallel \hat{e}_z = \hat{x}^3$

• Σ und Σ' haben parallele Achsen
Einheitsvektor in z -Richtung

Ansatz für die Transformation.

$$\textcircled{*} (x')^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 \underbrace{L_{\mu\lambda}}_{\text{Element der Transformationsmatrix}} x^\lambda$$

Linear, da sonst gleichförmige Bewegung in Σ keine gleichförmige Bewegung in Σ' mehr wäre!

benutze zunächst $\underline{V} \parallel \underline{x}_3$

$$\rightarrow (x')^1 = x^1 = x$$

$$(x')^2 = x^2 = y$$

und: $(x')^0$ und $(x')^3$ dürfen nicht von x^1, x^2 abhängen

Transformationsmatrix
mit Komponenten $L_{\mu\nu}$

$$\underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} L_{00} & 0 & 0 & L_{03} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ L_{30} & 0 & 0 & L_{33} \end{pmatrix}$$

Nutze jetzt die Invarianz des
Längenquadrats

$$(x'^0)^2 - \cancel{(x'^1)^2} - \cancel{(x'^2)^2} - (x'^3)^2$$

$$\stackrel{!}{=} (x^0)^2 - \cancel{(x^1)^2} - \cancel{(x^2)^2} - (x^3)^2$$

$$\Rightarrow (x'^0)^2 - (x'^3)^2 = (x^0)^2 - (x^3)^2 \quad (**)$$

benutze (aus der Form von $\underline{L}$) $\Rightarrow x'^0 = L_{00}x^0 + L_{03}x^3$
 $x'^3 = L_{30}x^0 + L_{33}x^3$

Einsetzen in $(\star\star)$ und Vergleich der Koeffizienten (von x^0 und x^3)

$$\Rightarrow L_{00}^2 - L_{30}^2 = 1$$

$$L_{33}^2 - L_{03}^2 = 1$$

$$L_{00}L_{03} - L_{30}L_{33} = 0$$

es gilt.
 $\Rightarrow \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

Ansatz: $L_{33} = L_{00} = \cosh x$
 $L_{30} = L_{03} = -\sinh x$

Bestimmung von x ?

Betrachte dazu Bewegung des Ursprungs des Koordinatensystems Σ'

- Von Σ (mit!) aus betrachtet:

$$x^3 = vt = \frac{v}{c} ct = \frac{v}{c} x^0$$

• Von Σ' aus betrachtet:

$$\begin{aligned} x'^3 = 0 &= L_{30}x^0 + L_{33}x^3 \\ &= (\cosh \chi)x^3 - (\sinh \chi)x^0 \\ &\rightarrow = (\cosh \chi)\frac{v}{c}x^0 - (\sinh \chi)x^0 \\ &= x^0\left(\frac{v}{c}\cosh \chi - \sinh \chi\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Klammer auf der rechten Seite
verschwindet

$$\Rightarrow \frac{v}{c} \cosh \chi - \sinh \chi = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\tanh \chi}_{\frac{\sinh}{\cosh}} = \frac{v}{c}$$

es folgt:

$$\cosh \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\sinh \chi = \cosh \chi \tanh \chi = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Führe ein:

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{L}} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

Matrix der Lorentztransformation mit $\underline{L} \parallel \hat{x}_3$
(gerade)

explizit:

$$x' = x$$

$$y' = y$$

$$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma(z - \beta ct)$$

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}z}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \gamma\left(t - \beta \frac{1}{c}z\right)$$

Bemerkungen:

- Für den allgemeinen Fall, dass die Koordinatensysteme gegeneinander verschoben sind, kann man ebenfalls ein $\underline{\underline{L}}$ finden!

• Grenzfall kleine Geschwindigkeiten.

$$\frac{v}{c} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \rightarrow 1$$

dann folgt:

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \\ z' &= z - vt \\ t' &= t \end{aligned}$$

} "nahe" Galilei-Transformation
(für $v \ll c$)

- Für $\frac{v}{c}$ nicht klein wird die Zeit offensichtlich mit-transformiert!

• Zur Notation:

$$(x')^\mu = \sum_{\lambda=0}^3 L_{\mu\lambda} x^\lambda$$

Einsten'sche Summenkonvention.

$$(x')^\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$$

(Lasse Summen-
Zeichen weg!)

über gleiche griechische Indizes
nebeneinander stehender Größen
wird summiert!

VII. 4. Folgerungen aus der Lorentztransformation

a) Relativität der Gleichzeitigkeit

es gibt keine absolute Zeit; Zeit ist eine Frage
des Bezugssystems!

Betrachte folgende Situation

- In Σ finden zwei Ereignisse „gleichzeitig“
an verschiedenen Orten z_1, z_2 statt

z.B. Aussendung
von Licht-
strahlen

$$\Delta t = t_1 - t_2 = 0$$

• Von Σ' aus gesehen.

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} z_1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$t_2' = \frac{t_2 - \frac{v}{c^2} z_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2} z_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad \text{Gleichzeitigkeit in } \Sigma!$$

Zeitdilemma in Σ' :

$$\Delta t' = t_1' - t_2'$$

$$= \frac{\frac{v}{c^2} (z_2 - z_1)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \neq 0 \quad \text{falls } z_2 \neq z_1 \text{ !}$$

In Σ' finden die Ereignisse nicht gleichzeitig statt!

Relativität der Gleichzeitigkeit!

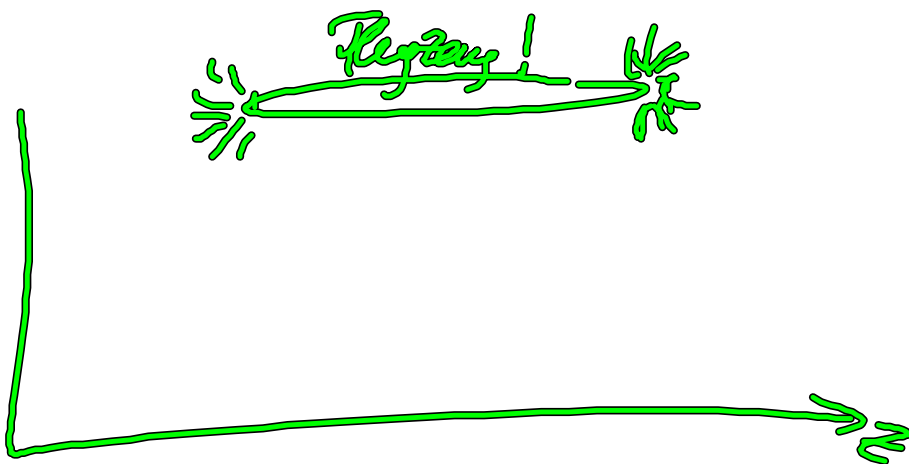
Beispiel:

Σ' = Flugzeug

Σ = Erde

gleichzeitige Aussendung von Lichtstrahlen vom Vorder- und Hinterrand des Flugzeugs aus ($z_1' \neq z_2'$, $t_1' = t_2'$)

$\Rightarrow$ impliziert, dass diese Lichtstrahlen auf der Erde nicht gleichzeitig eintreffen!



b) Zeitdilatation

- In Σ werden am selben Ort Σ zwei Lichtsignale im zeitlichen Abstand $\Delta t = t_2 - t_1$ ausgesendet (mit $t_2 > t_1$)
- Im bewegten System Σ' :

$$t_1' = \gamma \left(t_1 - \frac{v x_1}{c^2} \right)$$

$$t_2' = \gamma \left(t_2 - \frac{v x_2}{c^2} \right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

→ Zeitlicher Abstand in Σ'

$$\Delta t' = t_2' - t_1'$$

$$= \gamma \Delta t = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \Delta t' \geq \Delta t$$

Zeitintervall erscheint also dem bewegten Beobachter (Σ') als „gedehnt“

→ Zeitdilatation

Man nennt Δt (Zeitintervall im Ruhesystem Σ) die „Eigenzeit“

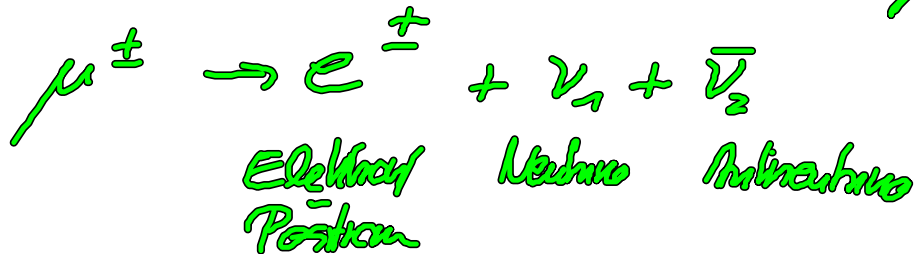
Exponentieller Zerfall

Zerfall instabiler Elementarteilchen

$\mu^\pm$ - Mesonen

entstehen beim Eindringen

Kosmischer Strahlung in die Erdatmosphäre:



Zerfallsgesetz: $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$

$\tau = \frac{1}{\lambda}$ "Zerfallszeit"

Die Mesonen haben eine sehr hohe Geschwindigkeit:

$$v(\mu^\pm) \approx 0.994 c$$

Man findet:

Die auf der Erde gemessene
Zerfallzeit ist viel größer als
diejenige im Ruhesystem der Kerne!

$$t_w \approx \gamma \tau_w$$

↑ Eigenzeit

Zerfallszeit im Ruhesystem

c) Längenkontraktion

betrachte einen Maßstab (Zeilstock)

- Länge im ruhenden System (Z)

(beachte: gleichzeitige Messung der Koordinaten
von Anfangs- und Endpunkt des
Zeilstocks!)

$$l = \Delta z = z_1 - z_2$$

(^{O.B.d.A.}
 $z_1 > z_2$)

• Länge in Σ'

$$l' = \Delta z' = z'_1 - z'_2$$

$$= \gamma(z_1 - vt_1)$$

$$- \gamma(z_2 - vt_2)$$

$$= \gamma(z_1 - z_2) - \gamma v(t_1 - t_2)$$

$$\rightarrow l' = \Delta z' = \gamma \underbrace{\Delta z}_l - \gamma v \Delta t \quad (*)$$

Wichtig nun:

Längenmessung $\hat{=}$ gleichzeitiges Ablesen der Koordinaten!
 — auch in Σ' !

Richtige Vorgehensweise:

betrachte zuerst den Zeitunterschied

in Σ' :

$$t_1' = \left(t_1 - \frac{v}{c^2} z_1\right) \gamma$$

$$t_2' = \left(t_2 - \frac{v}{c^2} z_2\right) \gamma$$

$$\rightarrow \Delta t' = t_1' - t_2'$$

$$= \left(t_1 - t_2 - \frac{v}{c^2} (z_1 - z_2)\right) \gamma$$

$$= \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta z\right) \gamma$$

$\stackrel{!}{=} 0$ da Messung in Σ' gleichzeitig erfolgen soll!

$$\Delta t = \frac{v}{c^2} \Delta z$$

$$\neq 0 \quad !!$$

Einsetzen in (*)

$$L' = \Delta z' = \gamma \Delta z - \gamma v \Delta t$$

$$= \gamma \Delta z - \gamma \frac{v^2}{c^2} \Delta z$$

$$= \gamma \Delta z \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$= \underbrace{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{\leq 1} \underbrace{\frac{\Delta z}{l}}_l$$

$$\Delta z' \leq \Delta z$$

$$l' \leq l$$

Längenverhältnisse!

Beachte

Es wäre also falsch gewesen, in (*) einfach (nur) $\Delta t = 0$ zu setzen.